Logica: tra matematica e filosofia

Materiali didattici:

www.pololiceale.it/2-articoli/1091-corso-di-logica

Corso introduttivo alle problematiche filosofiche di logica e matematica

Febbraio-Marzo 2018

Corso tenuto dal Prof. Stefano RICCI

Cenni di storia della logica

<u>Parte prima</u>

Da Aristotele alla Scolastica

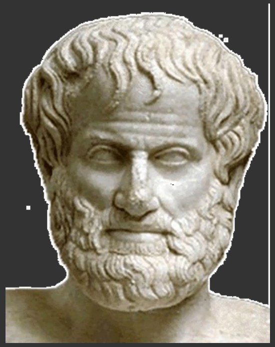
<u>Parte seconda</u>

La forma matematica della logica: da Leibniz a Quine

<u>Conclusione</u>

La logica intensionale e la logica induttiva

Da Aristotele alla Scolastica



Aristotele di Stagira (384 a.C.- 322 a.C.) è il primo filosofo ad aver elaborato una chiara concezione formale della logica. Sebbene egli non si riferisca mai a questa disciplina con il termine che noi usiamo attualmente per descriverla, i suoi testi raccolti con il titolo di *Organon* hanno posto le basi per la concezione di una disciplina formale del ragionamento. In vari contesti i termini da lui usati per definire la disciplina del ragionamento corretto sono: analitica, apodittica, sillogismo, dialettica, epagoghé (induzione), a secondo del valore che tali modalità potevano attribuire alla validità del ragionamento.

La «forma logica» aristotelica

La «forma logica» che Aristotele elabora nell'Organon è relativa in primo luogo, e fondamentalmente, a quella che lui designava con *Analitica* o *Apodittica*.

L'elemento primo di tale disciplina è l'analisi formale di quella che egli chiama «la predicazione» (*kategoroumenon,* «il predicabile»). L'opera *Categorie* si occupa infatti dei predicabili, ottenibili dalla forma generale delle proposizioni che è «S è P». Quali cose possono essere Soggetti? E quali i Predicati?

Aristotele elenca 10 categorie (poi ridotte a 8 in *Met.*) di termini che possono fungere da Soggetto (la categoria di Sostanza) oppure da Predicato (le altre categorie: Quantità, Qualità, ecc.).

Questa è forse la parte più «filosofica» della logica aristotelica, per le ovvie implicazioni metafisiche, ma di per sé ci fa comprendere che la «forma logica» di cui parla lo Stagirita è quella che noi oggi diciamo «logica predicativa».

Tale forma di logica prevede l'analisi formale della struttura «interna» di una qualsiasi proposizione. Con molta chiarezza Aristotele distingue gli enunciati **assertivi**, quelli che noi diciamo, in senso logico, **proposizioni**, da altri tipi di enunciati del linguaggio come, ad esempio, gli imperativi, o la preghiera. Ciò che distingue questi enunciati è che solo gli assertivi possono determinarsi come *veri* o *falsi.*

Le proposizioni

Secondo Aristotele, nell’opera *De Interpretatione*, vi sono quattro modi per attribuire un predicato ad un soggetto:

- «B inserisce a tutti gli A», che possiamo rendere equivalentemente[1] con «Tutti gli A sono B» (predicazione affermativa universale)
- «B inerisce a qualche A» («Alcuni A sono B») (predicazione affermativa particolare)
- «B inerisce a nessun A» («Nessun A è B») (predicazione negativa universale)
- «B non inerisce ad alcuni A» («Alcuni A non sono B») (predicazione negativa particolare)

In epoca scolastica a tali proposizioni vennero attribuite le lettere simboliche A, I, E, O, da cui dipende il famoso quadrato logico (vedi slide successiva).

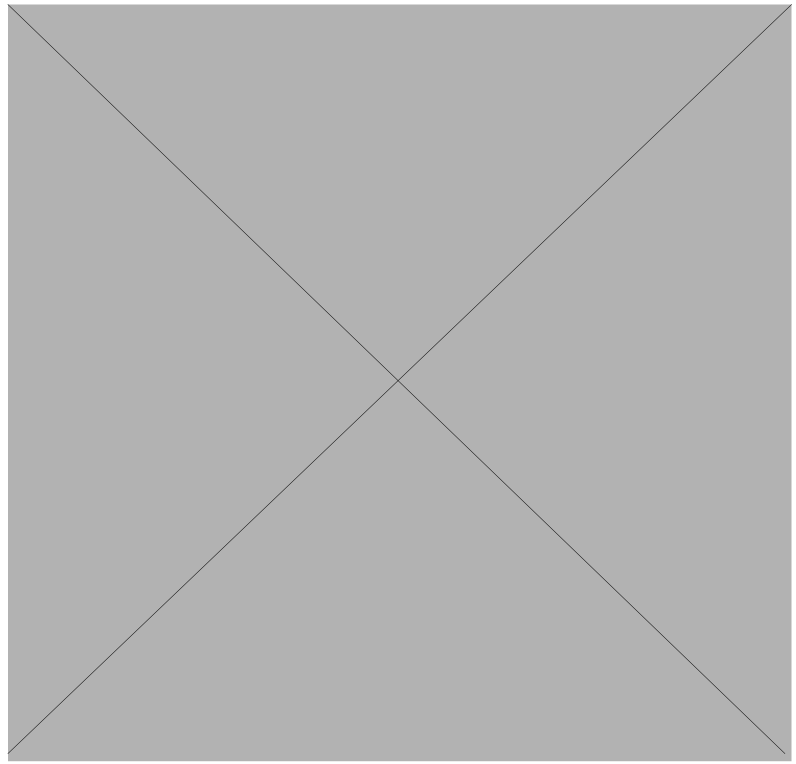
C'è da considerare inoltre il caso della proposizione affermativa o negativa singolare, come «Socrate è uomo», considerazione che svolgerà un ruolo fondamentale soprattutto nell'evolversi della discussione metafisica; ma Aristotele non è interessato all'analisi puramente logica delle proposizioni singolari e le ritiene riducibili o al caso universale o al caso particolare.

---

[1] Non tutti i filosofi e gli studiosi di Aristotele sono però d’accordo con tale equivalenza. In questo corso introduttivo vogliamo evitare certe complessità e scegliamo l’interpretazione canonica.

Il quadrato logico

A $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ **E** $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$



I $\exists x(Fx \wedge Gx)$ **O** $\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$

Le **A** sono contraddittorie con le **O**, le **E** lo sono con le **I**.
Quando l'una è vera l'altra è falsa e viceversa. Le **I** sono subordinate alle **A**, ma non viceversa; le **O** alle **E**, ma non viceversa. **I** ed **O** sono complementari: possono essere entrambe vere, ma non entrambe false. **A** ed **E** sono contrarie: non possono essere
entrambe vere, ma possono essere entrambe false

Il sillogismo

Il sillogismo, la cui teoria è sviluppata da Aristotele negli *Analitici Primi e Secondi*, è la forma logica del ragionamento, meglio sarebbe dire dell'**inferenza**, per cui da certe premesse si giunge ad una conclusione. Premesse e conclusione devono essere proposizioni, ma nella teoria del sillogismo, astraiamo dal loro valore di verità. Ciò che conta è la correttezza dell'inferenza. Negli *Analitici* lo Stagirita si occupa dell'inferenza apodittica, quella cioè che da premesse giunge necessariamente a una conclusione.

Premesse e conclusione, essendo proposizioni, dovranno assumere una delle quattro possibili forme della proposizione.

Il sillogismo aristotelico è formato da due premesse (dette maggiore e minore) e una conclusione. Ogni proposizione dovrà dunque contenere due termini, uno come soggetto l'altro come predicato. Avremo così un temine maggiore (quello contenuto nella premessa maggiore) e un termine minore (nella premessa minore) oltre naturalmente un termine medio, che servirà da collegamento in entrambe le premesse. Tale termine medio non dovrà comparire nella conclusione.

Durante la Scolastica si attribuirono parole mnemoniche anche ai sillogismi, che potevano avere premesse e conclusione di tipo differente a seconda della quantità, della qualità e della posizione relativa del termine medio e degli altri termini. Alcune di queste parole mnemoniche sono entrate anche nel linguaggio comune (ad es. il sillogismo in bArOcO). La prima tipologia di sillogismo, che Aristotele considera la più perfetta, è il cosiddetto sillogismo in bArbArA

Tutti gli A sono B

Tutti i B sono C

Tutti gli A sono C

Regole del sillogismo

Affinché un sillogismo sia valido (indipendentemente dal valore di verità delle proposizioni componenti) si devono verificare alcune condizioni:

- Almeno una premessa deve essere universale
- Almeno una premessa deve essere affermativa
- In entrambe le premesse ci deve essere un termine medio, che però non deve comparire nella conclusione
- Le premesse potranno essere vere o false, così come la conclusione, senza che ciò pregiudichi la correttezza del sillogismo; ma SE entrambe le premesse sono vere allora la conclusione sarà necessariamente vera (principio del sillogismo scientifico)

Il sillogismo scientifico e la teoria assiomatico-deduttiva

Negli *Analitici secondi* Aristotele studia la *forma* in cui si dovrà necessariamente presentare una scienza che si pretenda tale. Nella moderna logica matematica, questo argomento farebbe piuttosto parte di quella che si chiama Metalogica (o in certi casi, ad es. in Hilbert, Metamatematica).

La forma generale di una scienza deve essere costituita da un insieme strutturato di proposizioni tutte vere, che possono essere dimostrate, con le regole opportune, a partire da proposizioni semplici ed autoevidenti che Aristotele chiama Assiomi (da *axìomata*, le affermazioni più «degne»). Se gli assiomi sono veri, per il principio del sillogismo scientifico, tutte le proposizioni derivate da assiomi saranno necessariamente vere e prenderanno il nome di teoremi. L'esempio più celebre di scienza presentata secondo la forma assiomatico-deduttiva sono gli *Elementi* (*Stoichèia*) di Euclide di Alessandria (367 a. C. - 283 a. C.)

Gli assiomi più generali tra tutti, quelli che la logica apodittica ha in comune con la metafisica, sono: il **principio di non contraddizione**, $\neg(p \wedge \neg p)$

e il **principio del terzo escluso** $p \vee \neg p$

Aristotele non fa menzione esplicita del principio che nella logica matematica post-leibniziana diventerà il principio logico-metafisico fondamentale, cioè il principio di identità (A=A)

La scuola megarico-stoica

In epoca ellenistica la logica assume il nome di «dialettica» soprattutto ad opera della scuola megarico-stoica.

L'interesse di questi logici, a differenza di Aristotele, verte principalmente sul rapporto che le proposizioni hanno tra di loro esclusivamente secondo il loro valore di verità (V o F) senza preoccuparsi della struttura «interna» della proposizione. Questo è ciò che nella forma moderna di logica verrà chiamata **logica proposizionale**.

Filone di Mégara elabora il significato proposizionale dell'enunciato condizionale « Se … allora...» (nella logica moderna, *implicazione materiale* o semplicemente *implicazione*).

«Un enunciato condizionale è vero quando non può accadere che l'antecedente sia vero e il conseguente falso». Ciò corrisponde all'interpretazione moderna dell'implicazione data dalla sua tavola di verità, che genera tra l'altro i cosiddetti paradossi dell'*implicazione materiale*.

Gli altri connettivi logici studiati dagli stoici sono la negazione, la congiunzione e la disgiunzione.

Non tutti gli stoici furono d'accordo all'interpretazione dell'implicazione in senso materiale. Crisippo di Soli, scolarca stoico, elaborò un'interpretazione del condizionale di tipo più stringente e più simile all'utilizzo del linguaggio comune. Il suo concetto di implicazione formale verrà ripreso nel Novecento da Clarence I. Lewis per elaborare i suoi sistemi assiomatici di logica modale

L'inferenza nella logica stoica

I due principali metodi di dimostrazione per la logica proposizionale identificati e utilizzati dagli stoici, sono

Il **Modus Ponens**

Se *p* allora *q*
p

---

q

Il **Modus Tollens**

Se *p* allora *q*
non *q*

---

non *p*

Grazie a queste regole si possono evitare i famigerati ragionamenti scorretti, molto frequenti nel linguaggio comune, che vengono detti *affermazione del conseguente* e *negazione dell'antecedente* («ex falso sequitur quodlibet»). Il modus tollens avrà un ruolo primario anche da un punto di vista epistemologico (ad es. in Popper)

La logica della Scolastica

Nell'epoca della Scolastica (dal IX a tutto il XIII sec.) la logica assume il proprio nome. Moltissime le ricerche e le sistemazioni della logica aristotelica e stoica, che a volte creano indebite confusioni tra le due forme. Molte delle disquisizioni logiche e filosofiche sono importate dalla grande tradizione araba: in particolare si possono ricordare le ricerche di al-Ghazali, Ibn Sina (Avicenna) e Ibn Rusd (Averroé).

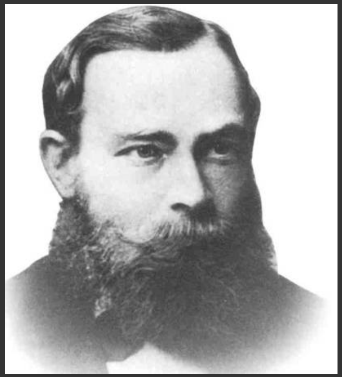
La ricerca e le speculazioni di tipo semantico e «metalogico» sono in quest'epoca acutissime e preziose. La sillogistica però, al di là della opportuna sistemazione cui molti si adoperarono, non sembra produrre sviluppi.

Notevoli sono da ricordare: la distinzione tra **estensione** e **intensione** (o comprensione) di un temine, che avrà sviluppi nella logica delle classi e nella filosofia del linguaggio, e la distinzione, in logica modale, tra modalità ***de dicto*** e ***de re***.

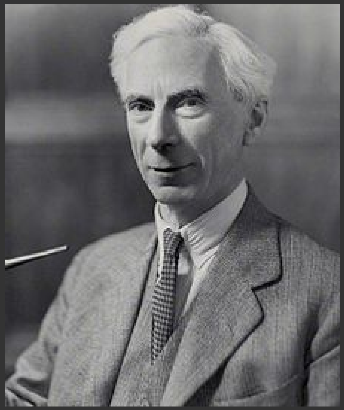
La forma matematica della Logica da Leibniz a Quine

G.W. Leibniz (1646-1716) è considerato il padre della logica matematica. Filosofo, teologo, matematico, fisico, organizzatore culturale, egli ideò contemporaneamente a Newton il calcolo infinitesimale. Inoltre, soprattutto in saggi pubblicati su riviste come gli *Acta eruditorum*, elaborò un calcolo logico che volle chiamare *characteristica universalis* (in pratica un linguaggio logico simbolico), dotato per la parte proposizionale, anche di un'interpretazione formale tramite valori di verità che egli per primo identificò con i segni 1 e 0 del neonato sistema numerico binario, aprendo la strada a fondamentali sviluppi per il calcolo automatico.
Nelle sue opere metafisiche e teologiche introdusse anche il concetto di ***«mondi possibili»*** che avrà importanti ripercussioni nella semantica della logica modale contemporanea (Kripke).

La forma matematica della logica elaborata da Leibniz, pressoché trascurata tra Sei e Settecento, conobbe un risveglio durante il XIX ad opera soprattutto di **George Boole** (1815-1864) e **Augustus De Morgan** (1806-1871).
A Boole si deve la celebre algebra che rappresenta la forma matematica della logica proposizionale con la consueta interpretazione dei connettivi vero-funzionali.



Gottlob Frege (1848-1925) ha un'importanza difficilmente sottovalutabile nelle ricerche di carattere logico, semantico e matematico. Grazie alla teoria degli insiemi di **Georg Cantor** (1845-1918) si rendeva concepibile il progetto a cui Frege lavorò per tutta la vita: la riduzione di tutta la matematica alla basilare teoria dei numeri (aritmetica) e di questa, tramite la sua assiomatizzazione da parte di **Giuseppe Peano** (1858-1932), alla teoria (detta in seguito,«naïve») degli insiemi, che Frege, però, interpretava come le Classi della logica predicativa del primo ordine. Questo era il programma che verrà detto *logicista*, secondo il quale la matematica poteva ridursi al calcolo logico.
La potenza di questo progetto però, s'infranse non appena ci si accorse che la teoria ingenua degli insiemi poteva contenere enunciati contraddittori. In particolare, fu il paradosso escogitato dal logico e matematico britannico **Bertrand Russell** (1872-1970), che metterà in crisi il progetto logicista.



Crisi dei fondamenti, logica e filosofia della matematica

La crisi dei fondamenti della matematica si era già sviluppata a partire dagli esordi del XIX sec. a causa delle geometrie non-euclidee che avevano fatto dubitare dell'evidenza degli assiomi euclidei. Con la crisi del logicismo alcuni matematici sentirono il bisogno di creare una nuova dottrina della matematica esente dalle problematiche che si erano venute a creare. Ma, come accade spesso, una nuova disciplina scientifica richiede l'analisi critica dei presupposti sottaciuti dai quali si parte. In ciò si può vedere all'opera sia la riflessione generalmente filosofica (per esempio epistemologica), ma anche la riflessione ontologica (dunque metafisica) sugli oggetti di cui si parla.

Si verranno così a formare varie scuole di filosofia della matematica: tra le principali citiamo il summenzionato ***logicismo*** (ripreso da Russell correngendolo con la Teoria dei tipi logici), l'***intuizionismo*** di Luitzen Egbertus Jan **Brouwer** (1881-1966), il formalismo di **David Hilbert** (1862-1943).

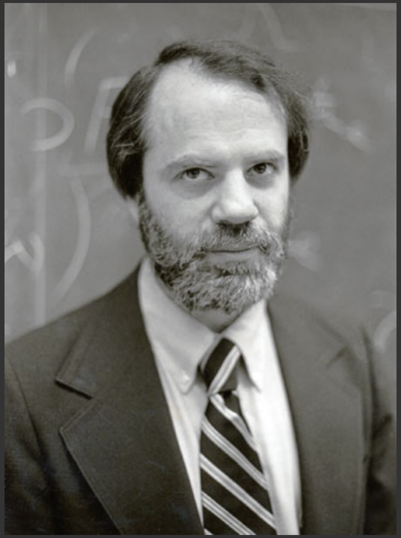
Durante il Novecento le ricerche sui fondamenti della matematica si sono sviluppati ulteriormente per poi perdere progressivamante centralità. Ma la teoria logica ha conosciuto una fortuna senza precedenti: accanto ai monumentali *Principia mathematica* (1910-1913) di Russel e Whitehead, si deve considerare soprattutto l'impatto dell'opera ***Tractatus logico-philosophicus*** (1921) di **Ludwig Wittgenstein** (1889-1951) che darà il via alla novecentesca filosofia della scienza. All'interno del Circolo che si venne a formare durante gli anni 20 intorno a Wittgenstein nascerà il progetto di una «filosofia scientifica», grazie al cosiddetto **neo-empirismo** o **neo-positivismo logico**. Un'altra opera di Wittgenstein, *Ricerche logiche* (1953), sarà invece all'origine della cosiddetta «**filosofia analitica**».

Il principale esponente del neo-positivismo logico sarà **Rudolf Carnap** (1891-1970), che produrrà molti lavori sulla logica, la semantica formale, la logica modale e la logica induttiva.

Quine

Il suo allievo e collega, lo statunitense **Willard Van Orman Quine** (1908-2000) svilupperà una versione rivista e corretta dell'empirismo logico di Carnap e, soprattutto, elaborerà una sua visione della logica e della matematica molto influente e apprezzata dai logici e dai filosofi. La sua raccolta di saggi *From a Logical Point of View* (1953) è ancora oggi considerato un classico di logica e filosofia.
La filosofia della logica e della matematica di Quine ha reintrodotto in maniera sobria, ma netta, la riflessione sui fondamenti ontologici delle discipline formali e ridato vigore alle ricerche metafisiche soprattutto in ambito anglo-sassone.

Logiche intensionali e logica induttiva



Alcuni logici e filosofi di orientamento analitico, come **Saul Kripke** (nato 1940) hanno contestato l'impostazione *estensionalista* di Quine ed hanno rinnovato l'interesse per gli aspetti ***intensionali*** della logica sviluppati sin dai tempi di Aristotele e della Scolastica. Il contributo di Kripke alla logica è principalmente legato alla sua interpretazione dei sistemi assiomatici modali (come S4 e S5 di C.I.Lewis) attraverso una «semantica a mondi possibili» che recupera in modo rigoroso il concetto già introdotto da Leibniz. Fondamentale è anche la sua teoria sulla designazione rigida dei nomi propri che darà vita alla nuova teoria del riferimento e del significato, rispetto a quella precedente elaborata da Frege e da Russell. La sua opera principale, dal punto di vista ampiamante filosofico, è ***Naming and Necessity*** (1970, nuova ed. 1980) che è diventato ben presto un classico.

Carnap e la logica induttiva

L'induzione è una inferenza che, a differenza della deduzione, cerca di trovare, ad esempio, una verità generale a partire da verità singole o particolari. In questo senso era già stata teorizzata da Aristotele e veniva da lui fatta risalire al metodo socratico del «tì esti?». Ma è solo a partire dal ***Novum Organum*** (1620) di Francis Bacon (1561-1626) che si parla di una logica basata sull'induzione come contrapposta a quella deduttiva. L'idea di una logica induttiva compie passi in avanti non decisivi con J. Stuart Mill (1806-1873) e W. Whewell (1794-1866). Ma nel XX sec. è lo sviluppo della teoria della probabilità in senso assiomatico (assiomi di Kolmogorov con il conseguente Teorema di Bayes) che conducono Carnap allo studio di un effettivo calcolo di logica induttiva. In due opere, ***Logical Foundations of Probability*** (1950) e ***The Continuum of Inductive Methods*** (1953) egli porrà le basi per un tentativo di ridefinizione matematicamente rigorosa della logica induttiva e dei suoi rapporti con il calcolo delle probabilità.

Bibliografia

- W.C. e M. Kneale, *Storia della logica*, 1972, Einaudi
- H. Scholz, *Storia della logica*, 1983, Laterza
- J. Bochenski, *Logica formale*, 2 voll., 1972, Einaudi
- http://tinyurl.com/jr86h7y (una breve storia della logica fino a Leibniz)