Lezione 2 B - Calcolo predicativo

Il calcolo dei predicati del primo ordine (in inglese *Lower Predicate Calculus*, LPC) deriva dall'estensione della forma logica studiata nella analitica aristotelica. In Aristotele, come abbiamo visto nella lezione 1, l'interesse si focalizza sull'analisi della proposizione, per così dire, al suo interno, separando in parti elementari i costituenti logici non ulteriormente riducibili (i cosiddetti *termini*). Così nella sua forma logica generale una proposizione si potrà scrivere come

«S è P».

Questa forma logica della proposizione, sulla cui struttura si basa tutta la logica aristotelica, è detta «Soggetto-Predicato» e viene considerata nella moderna logica matematica una forma particolare di proposizione, dal momento che il concetto di predicato aristotelico è considerato un caso particolare di *Relazione*, in particolare una relazione impropria o unaria. Tuttavia riflettiamo sul fatto che le relazioni possono essere *n*-arie: se preferiamo mantenenere il vecchio termine «predicato» dovremmo allora parlare di predicati *n*-ari.

Predicati n-ari

Se, adeguandoci alla moderna simbologia logico matematica, scriviamo «S è P» come

$P(s)$ o, che è lo stesso, $P^1(s)$;

possiamo notare che in questa forma potremmo considerare tutti i predicati *n*-ari come attribuiti a vari «soggetti» (o meglio, *argomenti*), come nel caso

$P^2(s_1,s_2)$ e così via.

Funzione proposizionale e proposizione

Il calcolo predicativo ha a che fare con la struttura interna di una proposizione. Se chiamiamo *a* un qualunque termine che denoti univocamente un individuo di un insieme (**costante individuale**), e P (**costante predicativa**) un qualunque predicato che si riferisca a una specifica classe di denotazione (eventualmente traducibile con *n*-ple ordinate di individui), possiamo allora dire che una forma generale della proposizione potrà avere la forma

$P^n (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

oppure nel caso più semplice (corrispondente alla forma logica aristotelica):

$P(a)$

Ad esempio, la proposizione P(*a*) potrebbe essere «Biagio è un gatto». Secondo Frege-Russell da una tale proposizione, che potrà essere vera o falsa, possiamo astrarre la forma generalizzata «*x* è un gatto», che Russell chiama «funzione proposizionale». Questa è una formula ben formata del calcolo predicativo, ma non è una proposizione, perché il suo valore di verità non può essere determinato fino a che non si attribuisca un individuo specifico (denotato da una costante individuale come *a*, che svolge la funzione di «nome») oppure una qualche quantità di individui, che possa soddisfare la **variabile individuale** *x*.

Una funzione proposizionale si può indicare con

$P^n (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

oppure nel caso più semplice di funzione monadica

$P(x)$

Proposizioni singolari, particolari, universali.

- Una proposizione *singolare* è della forma

  $P^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o nel caso più semplice $\mathbf{P}(\boldsymbol{a})$

- Una proposizione *particolare* sarà dunque della forma

  $\exists x\, \mathbf{P}(x)$ Da leggersi «Esiste (almeno) un *x* tale che … »

- Una proposizione *universale* avrà la forma

  $\forall x\, \mathbf{P}(x)$ Da leggersi «Per tutti gli *x* tali che … »

Importanti relazioni di equivalenza tra quantificatori

È del tutto opportuno introdurre una serie di equivalenze tra forme dei quantificatori, basate sulla loro interpretazione standard, e che già Aristotele aveva individuato.

$\exists \leftrightarrow \neg\forall\neg$

$\forall \leftrightarrow \neg\exists\neg$

Per cui, in base al principio di economia, potremmo usare in LPC un unico quantificatore.

Gli enunciati aristotelici e le loro relazioni

Il quadrato logico di Aristotele, contenuto nel *De Interpretatione* e riportato nella lezione 1, ci fornisce molte importanti relazioni tra enunciati.

Indichiamo

A «Tutti gli F sono G» come $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$

I «Qualche F è G» come $\exists x\ (Fx \land Gx)$

E «Nessun F è G» come $\forall x\ (Fx \rightarrow \neg Gx)$

O «Qualche F non è G» come $\exists x\ (Fx \land \neg Gx)$

Osservando i quantificatori è adesso evidente come mai, ad esempio, **A** ed **O** siano contraddittori:

per le equivalenze tra forme di quantificatori rendiamo

$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$ nella forma $\neg\exists x \neg(Fx \rightarrow Gx)$

Se $\neg\exists x\neg(Fx \rightarrow Gx)$ allora

(1)$\neg\exists x\neg(\neg Fx \vee Gx)$ per le equivalenze di PC

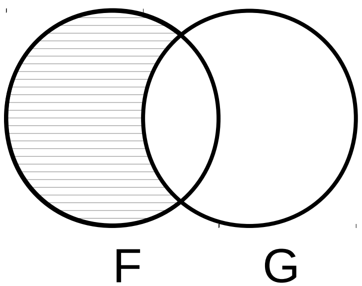
(2) $\neg\exists x \neg\neg(\neg\neg Fx\wedge\neg Gx)$ per DeM [$\boldsymbol{p\vee q \leftrightarrow \neg(\neg p\wedge\neg q)}$]

(3) $\neg\exists x(Fx\wedge\neg Gx)$ Per DN

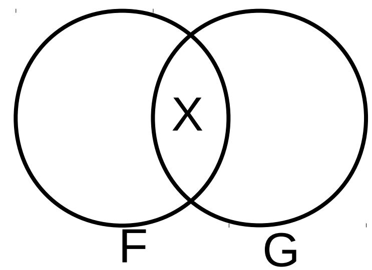
Se poniamo a confronto $\neg\exists x(Fx\wedge\neg Gx)$, che equivale a **A,** e $\exists x(Fx\wedge\neg Gx)$, che equivale ad **O**, vediamo che l'una è esattamente la negazione dell'altra, e che dunque, poste in congiunzione, conducono a una contraddizione. Infatti se chiamiamo $\boldsymbol{\alpha}$ la proposizione $\boldsymbol{\exists x(Fx\wedge\neg Gx)}$ allora $\boldsymbol{\neg\exists x(Fx\wedge\neg Gx)}$ sarà $\boldsymbol{\neg\alpha}$, e la loro congiunzione $\boldsymbol{\alpha \wedge\neg\alpha}$. ***QED***

Il sillogismo all'interno della logica predicativa

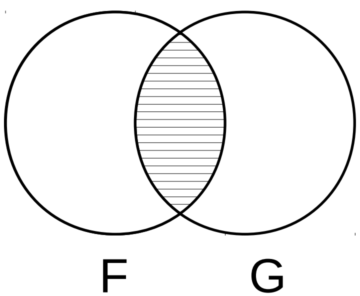
Utilizziamo i diagrammi di Eulero-Venn per illustrare le proposizioni aristoteliche:



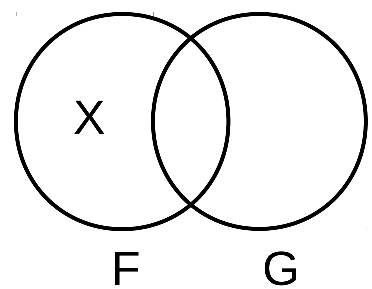
$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$



$\exists x\ (Fx \wedge Gx)$



$\forall x (Fx \rightarrow \neg Gx)$

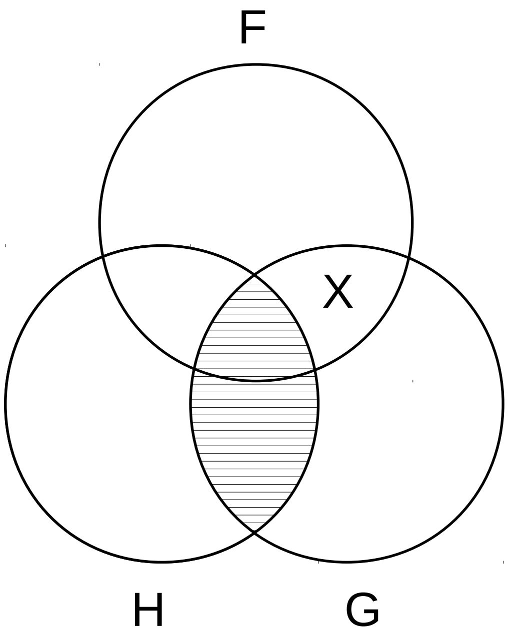


$\exists x\ (Fx \wedge \neg Gx)$

Sillogismo in fErIO

$\forall x\ (Gx \rightarrow \neg Hx)$
$\exists x\ (Fx \land Gx)$

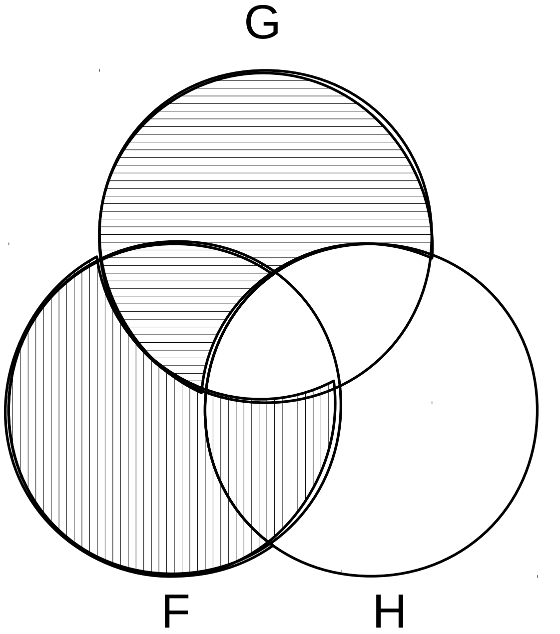
$\exists x\ (Fx \land \neg Hx)$



Sillogismo in bArbArA

$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
$\forall x\ (Gx \rightarrow Hx)$

$\forall x\ (Fx \rightarrow Hx)$



LPC – Calcolo dei predicati del primo ordine

Riassumiamo alcuni dei risultati raggiunti cominciando a definire gli elementi per costruire un sistema assiomatico per LPC.

Introdurremo dapprima il consueto concetto di formula ben formata (fbf); c'è da dire subito che in LPC non ogni fbf corrisponde ad una proposizione (come accadeva in PC). L'esempio più semplice di questo è la funzione proposizionale P(*x*) [D'ora in avanti senza rischio di equivoci scriveremo P*x*, ecc.], la quale pur essendo una fbf di LPC non è una proposizione.

1) Per prima cosa, utilizzeremo i connettivi logici già introdotti nel PC: ¬, Λ, V, → , ↔ intese nel senso consueto, a cui aggiungeremo i quantificatori ∀ e ∃ nel significato introdotto in questa lezione.

2) Una serie, eventualmente infinita numerabile, di costanti individuali: a_1, a_2, a_3, …, a_n; un insieme, eventualmente infinito, di variabili individuali: x, y, z, x_1, …, z_n.

3) Un insieme, eventualmente infinito, di costanti predicative n-adiche: $P_1^1, P_1^2, P_1^3, \ldots, P_1^m, P_2^m, \ldots, P_n^m$

4)L'uso di parentesi per evitare ambiguità.

Una fbf di LPC sarà della forma:

$Pa \quad Px \quad Py \quad P^2xy \quad P^2ay \quad \forall x\, Px \quad \forall x \exists y(F^2xy \land \neg G^2yx)$

più ovviamente tutte le fbff del PC (magari espresse in forma metalinguistica).

Assiomatizzazione di LPC

Schema di assiomi: se prendiamo gli assiomi di PC in forma metalinguistica avremo schemi di assiomi, e conseguentemente, schemi di teoremi;
ad es., potremo riformulare in forma metalinguistica l'assioma PC1

$(\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$

Ogni fbf valida di PC diventa così un assioma di LPC se usiamo gli esempi-per-sostituzione di una qualsiasi tesi di PC.
Un esempio-per-sostituzione in LPC di una tesi di PC è una tesi ottenuta da una fbf valida di PC sostituendo uniformemente ogni variabile presente in essa una qualche proposizione di LPC (ad es., sostituendo allo schema di assiomi di cui sopra la proposizione $\forall x\mathrm{P}x$, per cui

$(\forall x\mathrm{P}x \vee \forall x\mathrm{P}x) \rightarrow \forall x\mathrm{P}x$

che risulterà dunque una tesi di LPC

Assioma e regole proprii di LPC

Oltre agli assiomi derivati dagli schemi di assiomi di PC, abbiamo il seguente assioma proprio di LPC, assioma che definisce, insieme alle regole, il comportamento dei quantificatori (ovviamente basta definire il comportamento di un solo quantificatore, poiché il comportamento dell'altro si deriva per le equivalenze tra forme quantificazionali già introdotte).

∀1 Se *x* è una qualunque variabile individuale, *α* una qualunque fbf, e *β* una qualunque fbf diversa da *α* solo per avere qualche variabile individuale *y* rimpiazzante ogni occorrenza libera di *x* in *α*, allora

$\forall x\ \alpha \rightarrow \beta$

è un assioma, purché *x* non occorra nel campo d'azione di un'occorrenza di un quantificatore contenente *y*. (Controesempio: $\forall x \exists y\ F^2 xy \rightarrow \exists y\ F^2 yy$)

Le regole di traformazione primitive sono:
∀2: Se x è una qualunque variabile individuale e α e β sono proposizioni qualsiasi, allora da

$\vdash \alpha \rightarrow \beta$

segue

$\vdash \alpha \rightarrow \forall x\beta$

purché x non occorra libera in α.

MP: Il *modus ponens* del PC.
Un esempio di teorema di LPC è l'equivalenza tra forme quantificazionali:

$$\forall x\, \alpha \leftrightarrow \neg\exists x\neg\alpha.$$

Un altro esempio molto semplice è il seguente:

$$\mathrm{P}a \rightarrow \exists x\mathrm{P}x$$

Ci sono poi utili regole di trasformazione derivate: regola di universalizzazione
U: Se $\vdash \alpha$ allora $\vdash \forall x\, \alpha$

Soddisfacimento, verità e validità di una fbf in LPC

Semantica di Tarski (1902-1983): la complessità dell'assegnazione a LPC di una semantica, rispetto alla semplicità della semantica «a tavole di verità» del PC, si può ridurre, con alcune limitazioni, ad alcuni tipi di semantica elaborate da vari autori, tra cui Frege e Tarski. Faremo riferimento alla semantica tarskiana.

Soddisfacimento

Definiamo un *dominio* come un insieme di oggetti che costituisce l'universo di discorso.

Si definisce poi una *funzione interpretazione* come una funzione che attribuisce significati alle costanti individuali, alle costanti predicative, ai simboli di funzione, associandoli ad elementi del dominio o a loro *n*-ple.

Abbiamo così una *struttura* **S**.

Definizione di struttura: **S** è una coppia ordinata $\langle D, I \rangle$ tale che

1) $D \neq \emptyset$;

2) I è una funzione che assegna:

- a ciascuna costante individuale un elemento di D
- a ogni costante predicativa a n posti una relazione R tale che $R \subseteq D^n$
- a ogni simbolo di funzione a n posti una funzione F tale che $F: D^n \rightarrow D$

Data una struttura **S** è possibile definire una funzione *V* detta *assegnazione* di valori di una variabile ad elementi di *D*. Si può simbolicamente rendere un'assegnazione *V* ad un termine *t* del linguaggio *denotante* elementi di *D*, come:

$V[t]_{\mathbf{S}}$

Definizione di denotazione:

- Se *t* è una costante individuale, allora $V[t]_{\mathbf{S}} = [t]_{\mathbf{S}}$
- Se *t* è una variabile, allora $V[t]_{\mathbf{S}} = V(t)$
- Se *t* ha la forma $ft_1, \ldots, t_n$ allora $V[t]_{\mathbf{S}} = [f]_{\mathbf{S}}(V[t_1]_{\mathbf{S}}, \ldots, V[t_n]_{\mathbf{S}})$

Sulla base di tale definizione si può definire per via induttiva la relazione di *soddisfacimento* di una formula da parte di *V* in **S**:

- *V* soddisfa $P^n t_1, \ldots, t_n$ sse $\langle V[t_1]_{\mathbf{S}}, \ldots, V[t_n]_{\mathbf{S}} \rangle \in [P^n]_{\mathbf{S}}$;
- *V* soddisfa $\neg\alpha$ sse *V* non soddisfa α;
- *V* soddisfa $\alpha \rightarrow \beta$ sse *V* non soddisfa α o *V* soddisfa β:
- *V* soddisfa $\forall x\alpha$ sse ogni *x*-variante di *V* soddisfa α.

Quando una formula α è tale che almeno in una struttura c'è qualche assegnazione che la soddisfi, si dice che α è *soddisfacibile*.

Dato un enunciato α e una struttura **S**, sia $[\alpha]_{\mathbf{S}}$ il valore di verità di α in **S.** Allora:

$[\alpha]_{\mathbf{S}} = 1$ sse ogni assegnazione in **S** soddisfa α;

$[\alpha]_{\mathbf{S}} = 0$ sse nessuna assegnazione in **S** soddisfa α.

Da ciò si può definire il concetto di validità in LPC

Validità

$\models \alpha$ sse α è soddisfacibile da tutte le assegnazioni in tutte le strutture

Coerenza, completezza e decidibilità di LPC

- Il calcolo LPC si può dimostrare essere
- coerente (cioè che dati gli assiomi e le regole di trasformazione, per qualunque fbf α, non si potrà mai ottenere $\alpha \land \neg\alpha$);
- completo (cioè che in LPC assiomatico, se, per qualunque α, $\models \alpha$ allora $\vdash \alpha$);
- semi-decidibile (cioè si può decidere finitamente la validità di una fbf di LPC, ma non la sua non-validità)

Il problema delle proposizioni singolari e la teoria del significato

Se riprendiamo in considerazione il caso delle proposizioni singolari (che noi vogliamo scrivere genericamente come P*a*) che Aristotele aveva eliminato dalla considerazione del quadrato logico, ci rendiamo conto di alcune questioni interessanti dal punto di vista filosofico. Lo sviluppo di teorie sul modo in cui un soggetto si rapporta ad un predicato è legato alla teoria del significato di Frege e alla sua parziale ripresa da parte di Russell. L'opera a cui faremo riferimento è quella di Russell, *On Denoting*,(1905). Laddove Frege sostenne che vi erano due distinti aspetti del significato di ogni termine e proposizione (il loro *Sinn* e la loro *Bedeutung,* cioè il «senso» e la «denotazione», che già erano comparsi nella logica terministica medievale come «intensio» ed «exstensio»), Russell rifiutò la nozione di «senso» e la sostituì con quella di *funzione proposizionale*, che in metafisica si intende come una funzione che va dagli oggetti ad astratte proposizioni che sono il contenuto degli enunciati. Elabora dunque una teoria estensionale del significato. Esempi portati da Russell come entità linguistiche denotanti sono: «un uomo, ogni uomo, l'attuale Re di Francia, il centro di massa del sistema solare». Alcune espressioni denotanti denotano effettivamente un oggetto («il centro di massa del sistema solare», «Ogni uomo»), altre non denotano nulla (cioè denotano l'insieme vuoto, come «l'attuale Re di Francia»), altre denotano ambiguamente («un uomo»). Ma in particolare secondo Russell ogni nome proprio può essere sostituito da una descrizione definita: così Aristotele, dovrebbe essere sempre sostituibile con una descrizione specifica e definita individualmente, come «Il maestro di Alessandro».

Secondo una tale teoria, detta appunto delle **descrizioni definite**, ogni nome proprio del linguaggio comune può essere sostituito da una *descrizione definita* (o piuttosto, come correggerà il filosofo John Searle, con un «grappolo» (*cluster*) di descrizioni definite). Ma Russell riconduce le descrizioni definite stesse nell'alveo della logica classica estensionale rileggendo ad esempio la proposizione contentente una descrizione definita

«Il padre di Carlo II fu decapitato»

nel seguente modo

$$\exists x((\mathrm{P}x \land \forall y\, (\mathrm{P}y \rightarrow x=y)) \land \mathrm{D}x)$$

Quindi per ogni frase che contenga la descrizione «Il padre di Carlo II» implicherà la seguente proposizione esistenziale

$$\exists x(\mathrm{P}x \land \forall y\, (\mathrm{P}y \rightarrow x=y))$$

Il che vuol dire che esiste uno ed un solo oggetto che corrisponde al padre di Carlo II.
Questa lettura serve a Russell per dirimere un'importante questione: che significato dare alla proposizione «L'attuale Re di Francia è calvo»?
Se ogni proposizione contenente una descrizione definita che corrisponde ad una proposizione esistenziale deve essere interpretata in senso estensionale dovrà per forza denotare gli unici oggetti che una proposizione può denotare: il vero o il falso.
Dunque la proposizione precedente sul Re di Francia è semplicemente falsa poiché implica che qualcosa che non esiste, esista.

Oggetti non esistenti e il problema dei nomi propri

D'altro canto, è stato fatto notare, siamo portati a ritenere che una proposizione come «L'attuale Re di Francia non esiste» sia vera, benché secondo l'interpretazione russelliana dovrebbe essere falsa.
È il ben noto problema degli «oggetti insesitenti» o non denotanti: Russell vorrebbe fornire un metodo per evitare le teorie realistiche degli oggetti inesistenti come quella dei Meinong (1853-1920): secondo Meinong, gli oggetti «inesistenti» non hanno esistenza (*Existenz* o *Wirklichkeit*), bensì hanno **sussistenza** (*Bestand*). Vi sono poi oggetti che sono dati (*Gegebenheit*) ma non sussistono e non esistono.
Ciò però voleva dire per Russell distinguere due o più sensi del verbo «essere» e ciò era per lui, e per la concezione estensionale della logica, qualcosa di totalmente inaccettabile. Quine arriverà a dire, dopo aver corretto e riformulato la teoria delle descrizioni definite, la celebre frase: «Essere è essere il valore di una variabile».

Un altro problema che incontra la teoria di Russell è l'inadeguatezza della riduzione dei nomi propri a descrizioni definite nei contesti intensionali e modali.
L'esempio classico, che fornirà a S. Kripke lo spunto per la costruzione della sua «nuova teoria del significato», è, ad esempio,

«Necessariamente Aristotele è Aristotele»

Questa è una affermazione analitica (una tautologia), poiché essendo che sempre A=A, ciò è vero anche necessariamente.
Ma se sostituiamo al nome proprio Aristotele, come vuole Russell, la descrizione definita corrispondente, ad esempio, «il maestro di Alessandro», si otterrebbe

«Necessariamente Aristotele è il maestro di Alessandro»

che per quanto la si possa considerare fattualmente, cioè storicamente, vera non pare avere la proprietà di essere «analitica», e si potrebbero pensare mondi possibili in cui ciò è sicuramente falso.
Da questo sviluppo logico e metafisico, Kripke proporrà la sua teoria dei nomi propri come designatori rigidi.

Bibliografia e risorse online

- A. Iacona, S. Cavagnetto, *Teoria della logica del primo ordine*, 2010, Carocci
- http://tinyurl.com/j9sfykp
- I testi introduttivi già citati nella lezione 2.