Corso di logica
Lezione 3 A

Cenni di teoria degli insiemi e problematiche connesse: paradossi e questioni ontologiche.

Teoria degli insiemi

Teoria *naïve* degli insiemi

Georg Cantor (1845-1918) cominciò ad elaborare la teoria matematica degli insiemi verso il 1874. La teoria a cui dette vita però, andò incontro a problemi causati da paradossi, e questi paradossi erano generati da una certa libertà ch'egli si concesse nell'elaborare le sue intuizioni. Successivamente ai lavori di Russell si cominciò a riferirsi alla teoria cantoriana come alla teoria *naïve* (ingenua) degli insiemi. Le posteriori teorie assiomatiche degli insiemi verranno formulate con maggiore attenzione, ponendo condizioni per gli assiomi.

Insiemi

Si definisce **insieme** (*set*) una qualsiasi collezione di oggetti detti *membri*.

Ad es. i numeri **0**, **1**, **2** sono membri dell'insieme **{0, 1, 2}**, che può anche essere definito **{*x* | *x* è un numero naturale < 3}**;

così, se in una stalla ci sono tre mucche, **Bianchina, La Rossa, Semiramide**, queste sono membri dell'insieme **{Bianchina, La Rossa, Semiramide}**, che può anche essere definito **{*x* | *x* è una mucca della stalla}**.

L'appartenenza di un membro ad un insieme si rappresenta col simbolo

$$\in,$$

la non appartenenza col simbolo

$$\notin.$$

Assioma di estensionalità

La natura di un insieme dipende da nient'altro che dai suoi membri. Essere membro *x* di un insieme A si scrive, in simboli, $x \in A$.

Se A e B sono insiemi,

Per ogni insieme A, B: A=B *sse* $\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Assioma di comprensione

L'assioma di estensionalità ci dice quando due insiemi sono identici (quando hanno esattamente gli stessi membri); ma quanti insiemi ci sono o possiamo costruire?

Se A è un insieme e C è una condizione che ci consenta di individuare o costruire un insieme,

per tutte le C, *esiste un insieme* A *tale che*

$\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x$ soddisfa C)

Assioma di estensione e *assioma di comprensione*, per quanto in Cantor non venissero esplicitati ma solo presupposti, danno vita alla citata teoria *ingenua* degli insiemi. Inoltre, l'assioma di comprensione ci conduce direttamente al paradosso di Russell e dunque non può essere vero.

Membri, insiemi e sottoinsiemi

Siano x, y, z membri dell'insieme A: diciamo che B è un sottoinsieme di A, quando

$B = \{x\}$ **v** $\{y\}$ **v** $\{z\}$ **v** $\{x,y\}$ **v** $\{x,z\}$ **v** $\{y,z\}$ **v** $\{x, y, z\}$

e indichiamo il rapporto tra A e B, col seguente simbolismo:

$$B \subseteq A$$

Quando l'insieme B è un sottoinsieme di A diverso da A, scriviamo

$$B \subset A$$

e lo diciamo sottoinsieme *proprio.*

Un sottoinsieme può essere un membro dell'insieme a cui appartiene. Nel concetto di insieme, infatti, non c'è nulla che impedisca ai membri di un insieme di essere a loro volta insiemi (ad es., lettere, parole, pagine, libro, biblioteca).

Algebra degli insiemi

Insieme vuoto: un insieme che non ha membri si indica con {} o con ∅; l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme;

Unione: A ∪ B è l'insieme che contiene tutti i membri di A *oppure* di B;

Intersezione: A ∩ B è l'insieme che contiene tutti di membri che appartengono sia ad A che a B.

Complemento: L'insieme A – B: $\{x \mid x \in A \land x \notin B\}$

Singoletto: Un insieme che contiene un solo membro. Matteo Renzi e {Matteo Renzi} non sono la stessa cosa: il primo è una persona, il secondo un insieme.

L'insieme di Russell

Nel 1902 Bertrand Russell inviò a Gottlob Frege, che stava sviluppando il suo programma formale di riduzione della matematica alla logica *via* la teoria degli insiemi di Cantor, una lettera: in essa, Russell informava il logico tedesco di aver costruito un insieme che portava ad un grave problema. Per capire di quale insieme si tratti, si fa riferimento ad una caratteristica degli insiemi: quella di poter essere *membri* di insiemi.
Così, dunque, avremo insiemi che sono membri di se stessi (come l'insieme di tutti gli insiemi che hanno più di un elemento, così come l'insieme di tutto ciò che non è un auto) e insiemi che non sono membri di se stessi (come l'insieme di tutti gli insiemi che hanno un solo elemento o l'insieme delle auto).

Il paradosso di Russell

Russell scrive: sia l'insieme
R=$\{x \mid x \notin x\}$.
Qui si scatena l'inferno logicista per Frege. Infatti, Russell si chiede: l'insieme R è un membro di se stesso oppure no?

(1) Supponiamo che R non sia membro di se stesso.
(2) Allora, poiché R contiene tutti gli insiemi che non sono membri di se stessi, R è un membro di se stesso.
(3) Ma (2) contraddice (1)
(4) Dunque, per *reductio ad absurdum*, concludiamo che (1) è falsa e che R è un membro di se stesso.
Possiamo ripetere il ragionamento sulla supposizione che R sia membro di se stesso, giungendo alla conclusione che R non è membro di se stesso.
Se diciamo, dunque, α la conclusione (4) e, ovviamente, $\neg\alpha$ l'opposta conclusione del secondo ragionamento, avremo $\alpha\wedge\neg\alpha$. Una contraddizione nel cuore della scienza rigorosa per antonomasia

Conseguenze del «paradosso» di Russell

Il cosiddetto «paradosso» di Russell è propriamente un'*antinomia*. Comunque la si intenda, tale risultato pone immediatamente in crisi il programma *logicista* (si veda la prossima lezione) ideato da Frege, ma in generale, getta anche un'ombra inequivocabile sulla consistenza dell'intera scienza matematica.

Per capire ciò consideriamo quello che può essere definito il «riduzionismo» matematico che aveva preso piede sin dalla creazione della *geometria analitica* da parte di Cartesio e che, durante il XIX sec., aveva intravisto un chiaro obiettivo risolutivo grazie alla teoria degli insiemi di Cantor e alla assiomatizzazione della aritmetica da parte di Giuseppe Peano.

Insiemi infiniti e prodotto cartesiano e funzione

Un **insieme infinito** è semplicemente un insieme che contiene infiniti elementi. Uno dei modi più ovvi di immaginarsi un insieme infinito è pensare all'insieme **N** dei numeri naturali.

Tuttavia è evidente, e Cantor sottolineò ed elaborò questo punto, che esistono infiniti numerici più «numerosi» dei pur infiniti numeri naturali.

L'infinito dei naturali è detto *numerabile*; in particolare, l'infinito dei razionali **Q** è numerabile, ma non lo è quello dei reali **R**.

La dimostrazione della non numerabilità dei R fu ottenuta da Cantor grazie alla cosiddetta «costruzione diagonale».

Un modo semplice per capire la numerabilità e il suo opposto, consiste nell'introdurre il concetto insiemistico di *coppia ordinata* e il conseguente concetto di *prodotto cartesiano*.
Una coppia ordinata <*a*,*b*> è una particolare n-upla di elelmenti in cui si possa distinguere un *primo* membro da un *secondo* membro.
L'insieme di tutte le coppie ordinate che hanno il primo elemento nell'insieme A e il secondo nell'insieme B, si dice prodotto cartesiano e si indica con AxB.
Se intendiamo per insieme Q dei numeri razionali come l'infinito insieme di coppie ordinate di naturali il cui primo elemento è il numeratore e il secondo elemento il denominatore possiamo costruire una rappresentazione dei razionali mediante coppie ordinate di numeri naturali, sebbene non in ordine sequenziale, che intrattengono una relazione biunivoca con i numeri naturali. Questa dimostrazione può essere estesa a tutti gli infiniti numerabili.
Con ciò si dice che gli insiemi infiniti numerabili hanno la stessa *cardinalità* (quella del numerabile).
I numeri reali tuttavia sono infinitamente più numerosi di qualsiasi insieme infinito numerabile. La dimostrazione rigorosa è data, appunto, nella «costruzione diagonale». Per ora fermiamoci qui.

Poiché le relazioni, e in particolare le funzioni sono definite come insiemi di coppie ordinate, ed esistono costruzioni progressive degli interi, razionali, reali e numeri complessi a partire dall'insieme dei numeri naturali, siamo in grado di modellare essenzialmente tutte le strutture familiari della matematica.

L'insieme potenza e la non numerabilità dei reali

Insieme potenza è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme: chiamando A l'insieme {0,1} abbiamo 4 sottoinsiemi:

$\varnothing$, {0}, {1}, {0, 1}.

In generale,

per tutti gli insiemi A tali che A={x_A | M_A x_n con $n \in$N}) allora pow(A) ha 2^n sottoinsiemi.

Non è difficile mostrare che l'insieme {x | $x \in$R e $0 \leq x \leq 1$} ha la stessa cardinalità dell'insieme di tutti i sottoinsiemi di N (cioè è = pow N).

Scrivendo infatti un qualsiasi numero reale compreso nell'intervallo in sistema binario potremo interpretarlo come una «ricetta» per costruire un sottoinsieme di N: sia r_b un qualsiasi reale tra 1 e 0 scritto in forma binaria, ad es. 0,1100101…, poniamo 0 nel sottoinsieme di N se compare 1 alla prima cifra dell'espressione binaria (*e.b.*); poniamo 1 nel sottoinsieme se c'è 1 nella seconda cifra della *e. b.*; … poniamo *n* nel sottoinsieme se c'è 1 nella (n+1)-esima cifra della *e.b*; …

Ogni numero reale tra 0 e 1 può essere preso unicamente per determinare un sottoinsieme di N, e viceversa.

Perciò i numeri reali tra 0 e 1 e l'insieme potenza di N possono essere posti in relazione biunivoca e, in questo senso, hanno la stessa cardinalità più che numerabile (cioè non-numerabile). Non solo, di fatto tutto l'insieme R, si può dimostrare, ha la stessa cardinalità non numerabile, dei reali tra 0 e 1, e dunque di pow N.

Teoria assiomatica dell'aritmetica

Il «riduzionismo» matematico era cominciato con la geometria analitica e, soprattutto grazie al calcolo infinitesimale, aveva ricondotto tutte le strutture «geometriche», in ultima analisi, a strutture algebriche (dunque, numeriche). Adesso, grazie al lavoro di riduzione di molti matematici che andavano cercando di ricondurre le strutture algebriche superiori a forme sempre più «semplici», si arrivava a formulare la teoria che tutta quanta la matematica poggiasse le sue fondamenta sull'aritmetica (scorgiamo un sorriso sulle labbra di Pitagora).

Giuseppe Peano elaborò una celebre assiomatizzazione dell'aritmetica che porta il suo nome.

A1. $\exists x\ (x \in N)$ (ad es. 0 o in alternativa 1)

A2. $\exists \varphi \mid \varphi: N \to N$ (la φ rappresenta la funzione «successore di ...» da N su N)

A3. $\forall x \forall y (x \neq y) \to \varphi x \neq \varphi y$ con x, y, $\varphi \in N$

A4. $\forall x\ \varphi x \neq 0$

A5. (*Principio d'induzione matematica*) Se A è un sottoinsieme di N tale che:

a. $0 \in N$

b. $\forall x (x \in A \to \varphi x \in A)$

allora A=N

Insiemi, problemi ontologici e la teoria pura degli insiemi

Si potrebbe costruire un universo di insiemi nel seguente modo: cominciamo con gli individui a livello 0; dati tali individui ne costruiamo insiemi di livello 1; poi costruiamo insiemi di questi insiemi a livello 2 e così via. È un modo molto comodo e utile, ma molto incerto: in fin dei conti, cosa sono gli individui del livello 0? Dovremo includere solo le più semplici particelle materiali? Includeremo anche i punti spazio-temporali? Dobbiamo considerare gli individui possibili o solo quelli attuali?

Questi sono problemi ontologici, che disturbano il rigore e il formalismo di logica e matematica.

Sarebbe meglio fare a meno del tutto degli individui

L'insieme vuoto è il più semplice degli insiemi puri. Infatti non contiene individui. Naturalmente, ogni insieme formato a partire dall'insieme vuoto è anch'esso un insieme puro.
Ad esempio, dato l'insieme vuoto { }, possiamo costruire {{ }}, che è un insieme puro. Dati { } e {{ }}, possiamo costruire {{ }, {{ }}} oppure {{{ }}}. E così via. Possiamo generare un intero universo di insiemi puri.
Invece di utilizzare questo modo «costruttivo» di esprimerci, potremo semplicemente dire $\forall x \forall y\ (x,y \in \mathrm{Pu} \rightarrow \exists z\ (z=\{x,y\} \wedge z \in \mathrm{Pu})$ oppure $\forall x\ (x \in \mathrm{Pu} \rightarrow \exists y\ (y = \mathrm{pow}\ x \wedge y \in \mathrm{Pu}))$.

Interludio filosofico

L'*ontologia* di una scienza è la lista dei tipi di *cose* di cui la scienza parla. Di quali cose (oggetti) parliamo quando parliamo di matematica pura? La teoria degli insiemi puri ha giocato un interessante ruolo filosofico nell'ontologia della matematica pura. Alcuni ritengono che tutti gli «oggetti» della matematica pura possono essere ridotti a o identificati con insiemi puri.
John von Neumann (1903-1957) ha mostrato come si possano identificare i numeri naturali con insiemi puri.
0 è l'insieme vuoto ({ }) ed ogni numero successivo n+1 è l'insieme di tutti i numeri minori: $n+1=\{0, \dots, n\}$

0={ }
1={0}={{ }}
2={0, 1}={ { }, {{ }} } e così via.

Il filosofo e logico Paul Benacerraf (n. 1931) ha sollevato un'obiezione alla riduzione della matematica agli insiemi puri. Ci sono molti modi diversi, dice Benacerraf, tutti egualmente validi, di ridurre numeri a insiemi puri. Quello di von Neumann è uno, ma esiste anche quello di Zermelo (Ernst Zermelo, 1871-1953). Zermelo sostiene che 0 è l'insieme vuoto { } ed ogni numero successivo *n*+1 è l'insieme dei precedenti numeri: *n*+1 = {*n*}. Per cui:

0 = { }
1 = {0} = {{ }}
2 = {1} = {{{ }}} e così via

Qual è il modo corretto di ridurre numeri ad insiemi? quello di von Neumann o quello di Zermelo?
Benacerraf dice che se non c'è un singolo modo di ridurre, non c'è riduzione alcuna: i numeri naturali non si possono ridurre ad insiemi puri. Molti filosofi hanno risposto a Benacerraf, alcuni dicendo, per esempio, che il modo più vantaggioso di ridurre è quello di von Neumann. Ma la questione è lungi dall'essere risolta. Alcuni filosofi ritengono che la riduzione sia possibile, altri che non lo sia.
La posizione più radicale è forse quella di Quine. Egli sostiene che *ogni cosa* è riducibile ad insiemi puri. In sostanza, Quine sostiene dapprima che le cose materiali si possano ricondurre alle regioni spazio-temporali che esse occupano; le regioni spazio-temporali si possono ridurre a insiemi di punti; i punti si possono ridurre alle loro coordinate numeriche; e, infine, i numeri sono riducibili a insiemi puri. L'ontologia di Quine è chiara: «All you need is sets!»

La crisi dei fondamenti

Poniamo allora che sia possibile ricondurre la matematica all'aritmetica e questa alla teoria degli insiemi.

Che ne è del paradosso di Russell?

Bene, possiamo dire che seguendo l'intuizione che ci ha consentito di creare la teoria naïve degli insiemi siamo condotti alla antinomia di Russell: l'unica soluzione per non compromettere non solo il programma logicista, ma la stessa consistenza logica dell'intera scienza matematica, è quella di predisporre una teoria assiomatica degli insiemi, che eviti il formarsi di tale antinomia. Russell, negli anni successivi alla scoperta dell'antinomia, elaborerà una teoria assiomatica delle classi (insiemi), che peraltro lo condurrà a proseguire il programma logicista di Frege. Tale teoria assiomatica si fonda sulla cosiddetta «teoria dei tipi logici», che poi verrà estesa, su indicazione di Ramsey, nella «teoria dei tipi ramificata». L'assiomatizzazione di Russell e la stessa teoria dei tipi verrà però profondamente criticata per ragioni logiche e filosofiche.

La teoria assiomatica degli insiemi ZF e ZFC

Non si può esporre qui la teoria assiomatica detta di Zermelo-Fränkel (ZF), per la quale esposizione rimandiamo direttamente alla pagina di Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_degli_insiemi_di_Zermelo-Fraenkel
Ma possiamo sottolineare alcune cose:
(1) «Sebbene la maggioranza dei metamatematici creda che questi assiomi siano coerenti (nel senso che da essi non deriva alcuna contraddizione), questo non è dimostrato. Essi sono da molti ritenuti le fondamenta della matematica ordinaria e la loro coerenza non può essere provata dalla matematica ordinaria, come dimostrato da Gödel con il suo celebre secondo teorema di incompletezza.»
(2) «Il tentativo riduzionista dei logici di rifondare tutta la matematica moderna su basi insiemistiche si è scontrato con il fatto che alcuni risultati importanti basilari non sono dimostrabili con i soli assiomi di Zermelo. È quindi necessario aggiungere l'assioma della scelta, e il nuovo sistema formale che ne risulta viene solitamente chiamato ZFC, dove la "C" sta per "choice" ("scelta").»
(3) «Nel 1938 Kurt Gödel costruì un modello basato sulla ZF in cui l'assioma della scelta è valido (il modello è noto come Universo degli insiemi costruibili).In tal modo egli dimostrò che se ZF è coerente, lo è anche ZFC (l'unione degli assiomi della ZF e dell'assioma della scelta). Basandosi su tale presupposto, e sull'ipotesi, solitamente data per vera, che ZF sia coerente, i logici hanno visto nella ZFC la possibilità di fondare tutta la matematica su basi insiemistiche, dato che l'assioma della scelta si rivela indispensabile per raggiungere tutta una serie di risultati molto importanti (come l'esistenza di una base per un dato spazio vettoriale). Per questo motivo, nonostante tale assioma porti anche a risultati controintuitivi (come l'insieme di Vitali e il paradosso di Banach-Tarski), esso viene solitamente considerato vero.
Si è dovuto aspettare però il 1964 perché Cohen dimostrasse l'indipendenza dell'assioma della scelta dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel (ovvero che se ZF è coerente anche ZF¬C, l'unione degli assiomi della ZF e della negazione dell'assioma della scelta, lo è). In tal modo egli provò che effettivamente ZF e ZFC non sono la stessa cosa: la sua dimostrazione si basa sulla creazione di un modello in cui valgono tutti gli assiomi di ZF e la negazione dell'assioma della scelta.

Bibliografia e risorse online

A livello introduttivo si veda, ad esempio:

- Gabriele Lolli, *Guida alla teoria degli insiemi*, 2008, Springer

Per un approfondimento filosofico e logico-matematico si veda:

- Hao Wang, *Dalla matematica alla filosofia,* 1984, Boringhieri, specialmente cap. 6.
- http://tinyurl.com/hw5kvjp
- http://tinyurl.com/jxlbw2x