Lezione 3 B

La crisi dei fondamenti:
logica e filosofie della matematica

Breve introduzione storica

La crisi dei fondamenti della matematica ha radici molto antiche. Sin dalla sistemazione assiomatica di Euclide (*Stoichèia*, Elementi), alcuni geometri contestarono l'evidenza del Quinto postulato. La sua formulazione appariva complessa e, soprattutto, non altrettanto palesemente evidente come gli altri postulati.

La formulazione originale infatti recita:

«Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.»

Generalmente questo postulato è stato poi riformulato come «postulato delle parallele»: «Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta r data.»

Per gli antichi il concetto supremo cui attenersi per dimostrare il V postulato come teorema è dunque quello della mancanza dell'**evidenza**.
Nonostante ciò, tutti gli sforzi dei matematici antichi e moderni non sono riusciti a dimostrare il V postulato come teorema, dunque, può essere considerato a pieno titolo un «assioma» della geometria.
Interessante è la figura di Girolamo Saccheri (1677-1733) che pubblicò, lo stesso anno della morte, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, un'opera nella quale il matematico gesuita voleva dimostrare una volta per tutte la valenza assiomatica del V postulato. Per la dimostrazione ricorse alla *reductio ad absurdum*, cioè alla tecnica grazie alla quale, negata una tesi, se ne traeva una contraddizione (un *absurdus*) e dunque, negando la negazione della tesi, si dimostrava la validità della tesi di partenza.
Prendiamo ora la riformulazione dell' «assioma delle parallele»:
Per un punto esterno ad una retta *r*, si può tracciare una e una sola retta parallela ad *r*.
Se lo neghiamo, otteniamo due possibili enunciati:

1) per un punto esterno ad una retta passa più di una parallela, oppure
2) non ne passa nessuna.

Saccheri passa poi a tentare di dimostrare che da questi due nuovi «assiomi», mantenendo la validità dei primi quattro, si giunge a conclusioni assurde. Comincia dunque a dimostrare teoremi derivanti dai due nuovi gruppi di assiomi: A. i quattro di Euclide (E4) + 1); B. E4 + 2).
Ad un certo punto della dimostrazione, egli si convinse di aver trovato assurdità tali da non poter accettare nessuno dei nuovi gruppi di assiomi. La tesi assiomatica di Euclide era dunque salva da qualsiasi tentativo di revoca in dubbio.

Le geometrie non euclidee

L'ironia del caso Saccheri è che, nonostante l'infondata convinzione dell'assurdità delle conclusioni, egli senza avvedersene aveva dimostrato i primi teoremi di geometrie non euclidee. In particolare:

E4+1 diverrano gli assiomi della cosidetta geometria *iperbolica* di (Bolyai) Lobačevskij (1792-1856);
E4+2: gli assiomi della geometria *ellittica* di Riemann (1826-1866).

Le due geometrie non euclidee vennero considerate, sulle prime, poco più che stravaganze puramente teoriche (benché il vecchio matematico Gauss disse di non aver pubblicato le sue ricerche su una geometria simile a quella del Bolyai, solo per non udire «le strida dei beoti»); nella seconda metà del XIX sec. tuttavia, la matematica stava subendo delle importanti trasformazioni e cominciavano ad essere prodotte considerazioni metamatematiche sulla struttura e le proprietà dei sistemi assiomatico-deduttivi: non appariva poi tanto strano che un matematico potesse scegliere un sistema di assiomi ipotetico e da questo trarre rigorosamente dimostrazioni deduttive di teoremi, indipendentemente dall'eventuale interpretazione di tali assiomi, che ne avrebbe anche determinato anche la validità concreta.

In pratica, si cominciava a pensare ad un sistema assiomatico che potesse svilupparsi deduttivamente in senso puramente sintattico, senza aver bisogno preventivamente di una interpretazione che rendesse ad es. l'assiomatizzazione di una geometria «valida» e cioè, secondo le teorie scientifiche del tempo, corrispondente allo spazio fisico (geometria fisica).
Nel 1905 e poi nel 1915 Einstein elaborò la sua *Teoria della relatività*. In particolare nel 1915 egli si servì degli strumenti matematici elaborati da Gauss, Riemann, Levi-Civita e Ricci-Curbastro per elaborare la *teoria della relatività generale*. In essa si prevedeva l'uso di una geometria non euclidea quadridimensionale a curvatura positiva (derivata da quella di Riemann).
Nel 1919, l'astrofisico A. Eddington, organizzò una spedizione in occasione di un'eclissi di Sole all'isola di Principe per verificare una delle conseguenze della teoria, e cioè la flessione dei raggi luminosi (di una stella) in presenza di forte campo gravitazionale (del Sole). L'esperienza fu verificata.
Una geometria non euclidea poteva, dunque, essere interpretata come geometria dello spazio fisico (sostituendo dopo secoli il paradigma dello spazio fisico come «euclideo»), modificando in modo irreversibile il concetto stesso di «evidenza».

Da questa breve storia, possiamo trarre una considerazione per quanto attiene all'argomento specifico di questo corso: durante il XX sec. assisteremo ad una «liberalizzazione» della matematica pura, nel senso che la scelta degli assiomi di un sistema **S** poteva essere, in certo senso, «arbitraria», poiché non era più necessario che **S** dovesse per forza essere interpretabile secondo l'evidenza del «senso comune» anche di tipo scientifico.

Logica e matematica: quali rapporti?

Con la *liberalizzazione* delle teorie assiomatiche, con l'assiomatizzazione dell'aritmetica e poi con le teorie assiomatiche degli insiemi (ricordiamo, queste ultime necessarie per superare il paradosso di Russell) si cominciò a riflettere da parte, *in primis,* dello stesso Russell (come abbiamo già accennato nella precedente lezione), se fosse possibile portare a compimento il programma *logicista* fregeano di ricondurre la aritmetica (o in generale, la matematica) alla logica (nella fattispecie, alla logica predicativa).

Il logicismo russelliano trovò una piena esplicitazione nell'opera del 1910-1913 *Principia Mathematica* (scritta con A. N. Whitehead).

Logicismo

Dopo lo scacco del logicismo fregeano, proprio Russell si occuperà di sostenere la dottrina logicista in modo ancor più radicale, inserendo anche la geometria tra i candidati ad una possibile riduzione alla logica (Frege sosteneva il riduzionismo per l'aritmetica, non per la geometria).

In primis, il tentativo russelliano doveva predisporre una soluzione all'antinomia dello stesso Russell. Per fare questo egli elaborò la «teoria dei tipi logici» (evolutasi poi nella «teoria ramificata dei tipi» che incontrerà, però, problemi innumerevoli sia logico-matematici che filosofici e verrà infine abbandonata).

La teoria dei tipi parte dalla constatazione che si deve evitare, nella formulazione del sistema di assiomi, che si possa arrivare a formare un insieme come $\{x \mid x \notin x\}$ da cui deriva l'antinomia.

I *tipi* sono gerarchie di livelli degli enti logici, organizzati dai più semplici ai più complessi, definiti riferendosi ad enti già dati. (Livello 0: gli elementi. Livello 1: gli insiemi di elementi. Livello 2: gli insiemi di insiemi di elementi. E così via).

Russell pensa così di evitare, per prima cosa le definizioni impredicative (definizioni che fanno riferimento alla totalità a cui l'ente da definire appartiene): si deve cioè evitare, nel definire gli oggetti dell'universo di discorso qualsiasi definizione all'interno della quale sia presente almeno un termine la cui definizione implichi un riferimento alla classe cui il *definiendum* appartiene (es. *virtus dormitiva*). Così non si potrà formare la classe $\{x \mid x \notin x\}$ (ma, ovviamente, nemmeno la classe $\{x \mid x \in x\}$). Di fatto non possono esistere quantificatori che abbiano come campo d'azione l'intero universo dei membri, ma solo l'insieme degli elementi di un certo tipo.
Tuttavia senza definizioni impredicative, la matematica costruibile su tale base logica è limitata.

Parentesi logico-metafisica

Cosa intendiamo dire quando diciamo, per esempio, «Esiste un numero tale che...», oppure «Esiste un insieme tale che ...»? Vi sono due visioni metafisiche diverse nella filosofia della matematica: la visione *descrittiva* (gli enti matematici esistono indipendentemente dal metodo che usiamo per individuarli/conoscerli) e la visione *costitutiva* o *costruttiva* (per cui l'ente matematico è il risultato di atti o processi dell'attività razionale). Le definizioni impredicative presentano un problema insormontabile per il costruttivista, poiché esse individuano un ente sulla base della totalità a cui esso appartiene: una totalità che per il costruttivista, non essendo già data, non potrà essere utilizzata nelle definizioni.

Realismo e costruttivismo nella filosofia della matematica

Il problema filosofico che è stato sollevato dalle definizioni impredicative nella logica-matematica, può essere illustrato in modo semplice attraverso la seguente considerazione:

Sia $\alpha \leftrightarrow \beta$ una definizione; scegliamo di chiamare, convenzionalmente, l'espressione alla sinistra del segno di equivalenza, *definiendum* (ciò che deve essere definito) e l'espressione alla destra, *definiens* (ciò che definisce): sarà «predicativa» una definizione in cui nessuna espressione contenuta in α sia anche contenuta in β, «impredicativa» nel caso opposto; è chiaro che, mentre per un **costruttivista**, colui cioè che vuole utilizzare il *definiens* per «costruire» il *definiendum*, non sarà, in linea di principio, ammissibile utilizzare una definizione impredicativa, e dovrà ripiegare esclusivamente su definizioni predicative (a causa del fatto che gli oggetti dell'universo si costruiscono solo a partire da oggetti precedentemente esistenti (costruiti)), un **realista**, il quale ritiene che gli oggetti matematici esistono indipendentemente da noi e dai metodi che usiamo per individuarli, può usare definizioni impredicative (poiché gli oggetti di cui parlano *definiens* e *definiendum*, già esistono senza dover essere costruiti e il *definiens* costituisce solo l'insieme di istruzioni per individuare tale oggetto).

Il matematico svizzero Paul Bernays ha parlato del realismo matematico come di un «platonismo»:

«L'ipotesi "platonistica" più debole introdotta nell'aritmetica è quella della totalità degli interi […] Ma l'analisi non si accontenta di questo grado modesto di platonismo; essa ne considera uno maggiore riferendosi ai concetti seguenti: insieme di numeri, successione di numeri, e funzione, astraendo però dalla possibilità di dare definizioni degli insiemi, delle successioni, e delle funzioni. […] Nelle teorie di Cantor le concezioni platonistiche si spingono ben oltre quelle della teoria dei numeri reali.»

Il problema principale del sistema PM, e dunque dell'attuazione del programma logicista, è consistito anche nel voler attuare il metodo costruzionista (a cui si riconduce la teoria dei tipi) in un quadro matematico fondamentalmente realista (anche per riuscire a rendere conto degli ambiti matematici più ampi).

Segno del quadro di fondo realista dei PM sono, ad esempio, l'assioma di scelta e quello dell'infinito.

Ad esempio l'assioma dell'infinito dice (tradotto nella versione della teoria degli insiemi ZF):

$$\exists N[\emptyset \in N \land \forall x(x \in N \rightarrow x \cup \{x\} \in N)$$

Esiste un insieme N tale che l'insieme vuoto è in N, e tale che ogni volta che *x* è un elemento di N, l'insieme formato dall'unione di *x* con il suo singoletto {*x*} è anch'esso un elemento di N. Tale insieme è talvolta chiamato **insieme induttivo**.

Come si vede questo assioma esige l'esistenza degli N, cioè della *totalità* infinita già data dei numeri naturali.

Platonismo

Platonismo: (1) gli insiemi sono entità che esistono indipendentemente dai pensieri e costrutti umani, e benché astratti, sono ritenuti parte di una realtà oggettiva, esterna; (2) gli insiemi infiniti quali quelli dei numeri naturali e dei numeri reali sono ritenuti esistenti come oggetti completi, in atto; (3) per ciascun insieme, la totalità dei sottoinsiemi arbitrari di quell'insieme esiste come insieme completo, ben definito; (4) ogni proposizione intorno agli insiemi ha un valore di verità definito (vero o falso), indipendente dai modi con cui noi possiamo verificarlo.

Fallimento del progetto russelliano

Per quanto ben congegnate, le soluzioni russelliane poneva più problemi di quanti non ne risolvessero: tuttavia, accettando alcuni compromessi e compromissioni (soprattutto col platonismo), i logicisti pensavano di aver condotto a termine il loro compito.

La crisi defintiva del logicismo venne però da un articolo del 1931 di Kurt Gödel. Il titolo dell'articolo non a caso cita direttamente i PM:

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme

Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e sistemi affini.

In essi Gödel dimostrava l'incompletezza dell'aritmetica. Ma il risultato, formulato nei due teoremi di incompletezza, ebbe un effetto ben più generale, rispetto al semplice fallimento del programma logicista.

Il *formalismo* e il programma di Hilbert

David Hilbert (1862-1943) elaborò una lista dei ventitré principali problemi non risolti, nella sua famosa conferenza al Congresso internazionale dei matematici del 1900: i primi due riguardavano i fondamenti della matematica: precisamente, il problema del continuo e la coerenza di un sistema assiomatico per i numeri reali. Il programma di Hilbert per stabilire la coerenza dei sistemi assiomatici venne espresso per la prima volta in termini più specifici nel II problema, in cui richiedeva una dimostrazione della coerenza di un sistema d'assiomi per i numeri reali. Per lui, la fondazione di una qualsiasi scienza deve fornire un sistema esatto e completo di assiomi; inoltre, un concetto matematico esiste se, e soltanto se, un tale sistema di assiomi può essere mostrato come non contraddittorio.

Il formalismo sostiene che gli enunciati matematici possono essere pensati come affermazioni intorno alle conseguenze di certe regole di manipolazione di stringhe. Per esempio la geometria euclidea viene considerata come un "gioco" che si basa sopra alcune stringhe chiamate "assiomi" e alcune "regole di inferenza" e consiste nel generare nuove stringhe dalle stringhe date mediante le regole; in tale gioco si può dimostrare il teorema di Pitagora, cioè si riesce a generare una stringa che corrisponde al suo enunciato.

Il programma di Hilbert prevedeva una completa e consistente assiomatizzazione di tutta la matematica. ("Consistente" qui significa che dal sistema non si può derivare alcuna contraddizione). Hilbert intendeva mostrare la consistenza dei sistemi matematici a partire dall'assunzione che fosse consistente la cosiddetta "aritmetica finitaria", un sottosistema della usuale aritmetica degli interi naturali, scelta in quanto non soggetta a controversie filosofiche.
Una data parte della matematica va rappresentata formalmente in una teoria assiomatica **T**, specificata con precisione entro un linguaggio formale **L**. Questo linguaggio deve essere dato mediante alcuni simboli basilari e attraverso regole per costruire da essi le formule ben formate di **L** come successioni finite di simboli. Alcune di queste formule dovranno poi essere assunte come assiomi, distinguendo quelli che hanno un carattere logico generale e quelli che riguardano il contenuto di **T**; inoltre, dovranno essere date regole di inferenza per costruire dimostrazioni (o derivazioni) formali dagli assiomi sotto forma di successioni finite di formule. In queste ipotesi, può essere deciso in maniera effettiva, per ciascuna successione finita σ di successioni finite di simboli basilari, e per ciascuna formula φ se σ è o no una dimostrazione di φ. Una volta che una teoria assiomatica formale **T** è presentata in tale maniera, l'insieme delle formule dimostrabili di **T** è determinato come quello dei risultati finali di tali dimostrazioni, e **T** è coerente se nessuna contraddizione formale $\varphi \wedge \neg\varphi$ è dimostrabile da **T**. L'asserzione della coerenza di T è puramente 'finitaria', nel senso che si riferisce soltanto a possibili configurazioni finite σ date come successioni finite di termini, ciascuno dei quali è una successione finita di simboli di **L**. Il programma di Hilbert di ottenere una giustificazione incontrovertibile di una **T** siffatta richiedeva che la dimostrazione di coerenza di **T** dovesse essere condotta con metodi esclusivamente finitari.

La crisi del programma di Hilbert emerse nel 1931 dagli sbalorditivi risultati di Gödel in base ai quali se **T** è una qualsiasi teoria formale, presentata finitariamente e che contiene l'assiomatizzazione dell'aritmetica di Peano (PA), la consistenza di **T** non può essere dimostrata con metodi che possano essere formalizzati in **T**, a meno che **T** non sia già essa stessa incoerente. Inoltre, sembrava che tutti i metodi finitari, del genere di quelli impiegati nella scuola di Hilbert, potessero facilmente essere formalizzati in PA. Così, senza far intervenire metodi finitari sostanzialmente nuovi che vanno al di là di PA, non si poteva sperare di fornire una dimostrazione finitaria della coerenza di PA (assumendo che PA sia davvero coerente – ciò di cui difficilmente si potrebbe dubitare).
Sia il programma logicista che quello formalista incontravano, con i teoremi di incompletezza di Gödel, una brusca quanto inaspettata battuta d'arresto (e con tutta probabilità il fallimento definitivo, a meno di rielaborazioni piuttosto profonde)

Costruttivismo e intuzionismo

Il costruttivismo è una concezione che ha a che fare con la pratica matematica che rifiuta le definizioni impredicative (v. supra). La distinzione tra definizioni predicative e impredicative fu elaborata da Henri Poincaré (1854-1912). Egli riteneva che il sistema dei numeri naturali fosse direttamente comprensibile e che il principio di dimostrazione per induzione fosse sanzionato dall'intuizione e non richiedesse una riduzione a qualcosa di più basilare. A partire dal 1905, egli avviò un attacco incessante ai programmi insiemistici e logici per la fondazione della matematica, e specialmente al programma logicista, non vedendo alcun bisogno di ridurre la nozione di numero naturale a concetti logici. L'attacco di Poincaré alla teoria degli insiemi poggiava su una concezione della natura della matematica fondamentalmente opposta a quella di Cantor. Secondo Poincaré tutte le nozioni matematiche hanno la loro fonte nell'intuizione o sono ottenute da essa mediante definizione esplicita. **Gli oggetti matematici non hanno un'esistenza platonica indipendente, come sembra si debba richiedere per giustificare i principî insiemistici, e in particolare non ci sono totalità infinite.** Con questa filosofia 'definizionista' della matematica, Poincaré arrivò alla sua analisi dei paradossi e alla proscrizione delle definizioni impredicative: bisogna fare attenzione a distinguere definizioni apparenti da quelle che lo sono realmente. Le definizioni impredicative si caratterizzano per il fatto che pretendono di isolare un oggetto da una totalità facendo riferimento in modo essenziale (o esplicitamente o implicitamente) a quella totalità. Se questo procedimento è concepito come la 'creazione' di un tale oggetto mediante una definizione, si viola il requisito che il *definiens* debba, in tutti i suoi aspetti, essere precedente al *definiendum*.

L. E. J. Brouwer (1881-1966)

«Per un insieme **finito** A e per una proprietà P **decidibile** possiamo verificare $\exists x Px \vee \forall x \neg Px$ controllando volta per volta ciascun $x \in A$ per vedere se vale o no Px. In generale non c'è alcuna maniera di eseguire una tale verifica quando A è infinito, anche se P è decidibile».

Questa affermazione è basata per Brouwer su una concezione della matematica basata sull'intuizione e sulle capacità della mente di sviluppare con essa e con essa sola la scienza matematica. In particolare, l'aritmetica si fonderebbe, kantianamente, sull'intuizione pura del tempo.

Logica intuizionista

Per quanto riguarda i rapporti tra logica e matematica, gli intuizionisti sono del parere che non può essere la logica a fondare la matematica (poiché questa, in ultima analisi, si basa su una intuizione irriducibile), quanto piuttosto è l'inverso: dallo studio del modo effettivo in cui la mente (o la ragione) umana costruisce, sulla base dell'intuizione di tempo, gli oggetti matematici (innanzitutto i numeri naturali) dipende la stessa forma logica. Si tratterà però, stante la prospettiva costruttivista e il linea di principio finitaria, di produrre una logica che sia cogente con tale prospettiva.

Rinuncia al principio del terzo escluso

I principi della logica classica (da Aristotele a Leibniz, sino a Russell) sono fondamentalmente tre: 1) principio d'identità; 2) principio di non contraddizione; 3) principio del terzo escluso (*tertium non datur*). Anzi si può dire che data la bivalenza (1,0) della logica classica i tre principi, almeno da un punto di vista logico, si possono ricondurre al solo principio di identità.

Gli intuizionisti però, data la loro concezione costruttivista, ritengono che la matematica debba «insegnare» alla logica che il terzo escluso non può essere sempre giustificato (lo sarà per insiemi finiti, non per quelli infiniti).

Come Brouwer osserva, quando il dominio degli oggetti è infinito, anche per una proprietà P che sia decidibile su ogni specifico oggetto, ci si può trovare nella situazione in cui da un lato non si sa mostrare che tutti gli oggetti soddisfano la negazione di P, e dall'altro non si sa nemmeno trovare un oggetto specifico che la soddisfi: questo infatti richiederebbe una osservazione su tutto il dominio infinito, cosa umanamente impossibile. Utilizzando la simbologia della logica formale, non si conosce la verità di $\forall x \neg Px$, ma nemmeno quella di $\exists x Px$. Dato che $\forall x \neg Px$ equivale a $\neg \exists x Px$, ci si può quindi trovare nella situazione in cui non possiamo dire che $\exists x Px \vee \neg \exists x Px$ sia vero. Brouwer conclude che alcuni principi logici, *in primis* il principio del terzo escluso, secondo cui $\alpha \vee \neg \alpha$ è vera qualsiasi sia la proposizione α, non sono affidabili.

Per la logica intuizionista affermare, ad esempio, *p*, equivale a dire che *p* è costruibile mediante una costruzione dimostrativa che si conclude con *p,* e non che *p* equivale a dire che «*p* è vera».
Un conseguenza della logica intuizionista è che non può valere la classica definizione del principio della Doppia Negazione ($p \leftrightarrow \neg\neg p$) : infatti, in questa prospettiva, mentre $p \rightarrow \neg\neg p$ è valido, poiché se si è dimostrato che *p* ovviamente non si può dimostrare che non esiste dimostrazione che *p,* viceversa $\neg\neg p \rightarrow p$ non è valida: se non c'è una dimostrazione che non esiste una dimostrazione di *p*, non è possibile concludere che esista una dimostrazione di *p*.

Rifiuto dell'infinito *attuale*

Per le stesse concezioni costruzioniste, l'intuizionismo rifiuta, in ambito più propriamente matematico, anche l'astrazione dell'infinito **attuale** e accetta solamente la formazione del concetto di infinito **potenziale**.

L'intuizionista non considera date le collezioni infinite di oggetti, come l'insieme di *tutti* i numeri naturali (la *totalità* dei naturali come un oggetto). Ciò comporta la ricostruzione di gran parte della teoria degli insiemi. I risultati sono teorie profondamente diverse dalla loro versione tradizionale.

Inoltre, ampie parti della matematica paiono essere difficilmente trattabili senza l'assioma di scelta (di stampo realista) e senza concetti come pow(N), la potenza del continuo, gran parte dell'analisi matematica superiore è indisponibile ad una trattazione costruttiva.

Incompletezza della matematica

I risultati dei due teoremi di incompletezza di Gödel del 1931, porranno termine a due programmi: il logicista e il formalista:

Il **Primo Teorema di incompletezza** di Gödel dice che:

In ogni teoria matematica T sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, esiste una formula α tale che, se T è coerente, allora né α né la sua negazione $\neg\alpha$ sono dimostrabili in T.

Con qualche semplificazione, il primo teorema afferma che:

In ogni formalizzazione coerente della matematica che sia sufficientemente potente da poter assiomatizzare la teoria elementare dei numeri naturali (vale a dire, sufficientemente potente da definire la struttura dei numeri naturali dotati delle operazioni di somma e prodotto) è possibile costruire una proposizione sintatticamente corretta che non può essere né dimostrata né confutata all'interno dello stesso sistema.

Secondo teorema di Gödel

Sia T una teoria matematica sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica: se T è coerente, non è possibile provare la coerenza di T all'interno di T.

Con qualche semplificazione,

Nessun sistema coerente può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza.

Dal secondo teorema si stabilisce il fallimento del programma di Hilbert di dimostrare la coerenza di una teoria assiomatica T per l'aritmetica elementare;

uno dei risultati del primo teorema è, tra gli altri, il fallimento del programma logicista: si può infatti vedere che se l'aritmetica è incompleta (cioè in essa devono esistere formule valide che non sono dimostrabili), la logica proposizionale e predicativa invece lo sono (come del resto si può anche dimostrare che siano coerenti). Un sistema teorico «incompleto» non puo essere ridotto ad uno che sia «completo»; così come un sistema che non può essere dimostrato coerente ricondursi ad uno in cui invece la coerenza sia dimostrabile.

Gödel e la fine del sogno leibniziano?

L'incompletezza della matematica dimostrata da Gödel ha sollevato, come immaginabile, una ridda di questioni filosofiche. Alcuni vi hanno visto, a partire dallo stesso Gödel, la conferma della realtà *platonica* degli enti matematici, per quanto tale platonismo si differenzi da quello logicista per la dimostrata non riducibilità della matematica alla logica. Altri ne hanno concluso che una presentazione puramente *formalistica* (sintattica) della matematica, non è sufficiente e si deve sempre accompagnare tale presentazione assiomatica con almeno alcuni modelli interpretativi (semantica). Altri ancora si sono rivolti con maggiore convinzione verso una concezione *intuizionista* o *costruttivista* della matematica (per quanto anch'essa presenti considerevoli problemi nella costruzione delle varietà più astratte dell'analisi).

Resta il fatto che il risultato di Gödel, in un senso ampiamente filosofico, sembra essere il *Requiem* per il sogno leibniziano della *mathesis universalis*. La mente umana che riesce a pensare la matematica, pone in essa, sin dai suoi assiomi, un potere espressivo tale che non tutte le sue proposizioni vere sono derivabili come teoremi.

In pratica, la capacità di pensare assiomi per l'aritmetica propria della mente umana non può essere riprodotta secondo un modello automatico. Questo ha sollevato ulteriormente questioni di tipo metafisico sull'esistenza dell'anima, sul libero arbitrio, sul determinismo, sull'ontologia degli enti fisici e matematici. Ma ha posto anche questioni logiche sulla capacità degli elaboratori elettronici di riprodurre la complessa varietà della razionalità umana (sempre che la razionalità umana si possa considerare come operante indipendentemente da fattori, storici, personali, culturali, psicologici, sociali, emotivi, ecc.).

Bibliografia

Innanzitutto per avere un quadro storico articolato, ma generale, della questione dei fondamenti della matematica, si consiglia di consultare il testo dei coniugi Kneale, *Storia della logica*, Einaudi, capp. VI-X, *cit*.

- Matteo Plebani, *Introduzione alla filosofia della matematica*, 2011, Carocci
- Carlo Cellucci, *La filosofia della matematica del Novecento*, 2007, Laterza
- E. Nagel, J.R. Newman, *La prova di Gödel*, 2013, Bollati Boringhieri

Appendice sui testi di logica per concorsi:

- Carlo Tabacchi, *I test di logica per tutti i concorsi*, 2015, Alpha Test