Lezione 2 A

Materiali didattici e informazioni:

www.pololiceale.it/2-articoli/1091-corso-di-logica

Logica classica 1: Calcolo proposizionale

Calcolo proposizionale

Nella logica degli enunciati (o proposizioni) si vuol analizzare un certo insieme di proposizioni atomiche (o elementari) e le relazioni tra queste, in modo da formare altre proposizioni dette molecolari (o composte).
La *metateoria* del calcolo proposizionale (PC) si occuperà delle **regole inferenziali**, della **semantica** e della **completezza e coerenza** di tale calcolo.

Proposizioni come «Piove» o «Marco va a Roma» sono considerate elementari e vengono rappresentate da variabili,
$p, q, r, s, t, \dots, p_1, \dots, t_n$.
Per avere proposizioni composte dobbiamo disporre dei *connettivi* come «non», «e», «o», «se … allora», «se e soltanto se», parti invariabili della proposizione composta, che vengono detti perciò anche *costanti logiche*. Per rappresentare le costanti logiche in forma simbolica si utilizzano

¬ per «**non**» (*negazione*)
Λ per «**e**» (*congiunzione*)
V per «**o**», «**oppure**» (*disgiunzione* in senso inclusivo)
→ per «**se … allora ...**» (*implicazione* materiale)
↔ per «**se e solo se**» (doppia implicazione o *equivalenza*)
Utilizzeremo le parentesi per evitare ambiguità.

Formule ben formate. Connettivi vero-funzionali

Una formula ben formata (fbf) è esemplificata dalle seguenti successioni di segni:

p q $\neg p$ $p \land q$ $p \lor \neg q$ $(p \land \neg q) \rightarrow \neg r \lor s.$

Se una successione di segni non è una fbf allora non rappresenta una proposizione.

Il calcolo proposizionale (*PC*) si basa sul fatto che alle proposizioni possa essere attribuito in generale, e senza entrare nei dettagli, un *significato*: esso consiste, per il PC, nell'attribuire ad ogni proposizione elementare il valore Vero (1) o il valore Falso (0).

La proprietà dei connettivi della logica classica è di essere ***vero-funzionali*** tali, cioè, da consentire di stabilire il valore di verità dell'enunciato composto a partire da quello delle proposizioni elementari che lo compongono

Tavole di verità (semantica).

Si prendano due proposizioni elementari qualsiasi *p* e *q*. Applicando i connettivi in modo opportuno possiamo ottenere le seguenti valutazioni per gli enunciati composti:

p	**¬*p***
1	0
0	1

p	***q***	***p*∧*q***
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	***q***	***p*∨*q***
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implicazione ed equivalenza

p	*q*	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Nel caso dell'implicazione materiale abbiamo subito un problema: il condizionale rappresentato dalle tavole di verità non sembra corrispondere al modo consueto del linguaggio comune di interpretare un condizionale.

p	*q*	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

I paradossi dell'implicazione materiale

Nel linguaggio comune possiamo dire ad esempio «Se piove allora Marco va a Roma», ed interpretiamo tale affermazione come vera, se piove e Marco va a Roma, ma inoltre se riteniamo ci sia un legame, una connessione, tra il fatto che piova e che Marco vada a Roma.

L'implicazione materiale (filoniana) della logica classica è invece solo vero-funzionale, cioè un mero dispositivo per stabilire la verità della proposizione composta a partire dalle proposizioni componenti e NON si preoccupa se tra le proposizioni componenti vi sia o no una connessione.

Se riprendiamo l'esempio precedente, la verità dei due enunciati «piove» e «Marco va a Roma» è indipendente dall'esistenza di un nesso tra il piovere e l'andare a Roma di Marco.

In conseguenza di ciò, se si dà il caso che non piova, la proposizione

(a) «Piove $\rightarrow$ Marco va a Roma»

è vera sia che Marco vada a Roma sia che non ci vada.

Ricordiamoci che tra i due eventi non c'è nessun nesso.

Ancora, se di fatto Marco va a Roma, la proposizione (a) è vera anche se non piove.

Questi sono i cosiddetti paradossi della implicazione materiale: ma tali paradossi sorgono, come già detto, perché nel linguaggio comune tendiamo ad interpretare il condizionale come se esprimesse una connessione (logica o causale) tra le proposizioni componenti. La logica classica a due valori ha potuto svilupparsi tranquillamente senza considerare tali problematiche come rilevanti. Questo non vuol dire che alcuni logici e filosofi non abbiano tentato di formalizzare il condizionale del linguaggio comune, in modo da dissolvere i paradossi. Anzi, proprio la riflessione sul condizionale materiale filoniano, avrebbe portato C.I. Lewis, nel 1918, alla prima assiomatizzazione della logica modale.

Sintassi (o linguaggio) «Riduzione» dei connettivi

I connettivi vero-funzionali hanno una caratteristica che li rende particolarmente attraenti per l'economia del calcolo proposizionale: essi sono inter-traducibili.
Alcuni logici applicano il principio di economia e riconducono tutti i connettivi alla semplice negazione (**¬**) e alla congiunzione (**∧**) o a negazione e disgiunzione (**∨**). È, ad esempio, evidente che $p \rightarrow q$ equivale a $\neg(p \wedge \neg q)$ oppure che $p \vee q$ equivale a $\neg(\neg p \wedge \neg q)$: per constatarlo basta costruire l'apposita tavola di verità. **[Esercizio.]**

Trasformazioni di equivalenza

Elenchiamo qui alcune equivalenze valide che sono particolarmente utili per effettuare trasformazioni del PC.

PC1	$p \land q \leftrightarrow \neg(\neg p \lor \neg q)$	Leggi di De Morgan
PC2	$p \lor q \leftrightarrow \neg(\neg p \land \neg q)$	
PC3	$p \leftrightarrow \neg\neg p$	Doppia negazione
PC4	$p \lor q \leftrightarrow q \lor p$	Leggi commutative
PC5	$p \land q \leftrightarrow q \land p$	
PC6	$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	Legge di trasposizione
PC7	$p \land (q \lor r) \leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$	Leggi distributive
PC8	$p \lor (q \land r) \leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$	

Sintassi (o linguaggio)
PM: Sistema assiomatico per PC

Un sistema assiomatico è un sistema di (A) una lista di *simboli primitivi* insieme con le *definizioni* convenienti; (B) un insieme di regole per le *fbf*; (C) una selezione di fbff che fungano da *assiomi*; (D) *regole di trasformazione* per passare da una tesi ad un'altra tesi.

Una tesi o è un assioma oppure una fbf (che si dirà teorema) ottenuta attraverso l'applicazione a tesi delle regole di trasformazione.

Il sistema PM rappresenta l'*assiomatizzazione* del Calcolo Proposizionale fornita da Russell e Whitehead nell'opera del 1910-13 *Principia Mathematica*.

Ci sono quattro assiomi:

A1 $\quad (p \vee p) \rightarrow p$

A2 $\quad q \rightarrow (p \vee q)$

A3 $\quad (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

A4 $\quad (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

Ci sono due regole di trasformazione primitive

R1 **Regola di sostituzione uniforme**: Sostituendo uniformemente una qualunque variabile di una tesi con una qualunque fbf si ottiene ancora una tesi.

R2 **Modus ponens**: Se α e $\alpha \rightarrow \beta$ sono tesi, β è una tesi.

Dimostrazione di un teorema in PM

Dimostriamo il teorema

T1 $p \rightarrow (p \vee q)$

(1) $q \rightarrow (p \vee q)$ per **A2**

(2) $p \rightarrow (q \vee p)$ per **R1** sostituendo *p* con *q* e viceversa, uniformemente

(3) $p \rightarrow (p \vee q)$ per **PC4**

QED

Semantica.
Validità in PM: il metodo della R*eductio*

Il metodo della *Reductio* ci consente di valutare in modo rapido e sicuro se una fbf sia una tesi valida di PM oppure no. Può sostituire, con alcune condizioni, il metodo delle tavole di verità, specialmente se le fbff sono particolarmente complesse. In breve si tratta di ipotizzare la falsità della fbf e conseguentemente stabilire, per un'assegnazione di valori di verità uniforme, se si incorra in una contraddizione, cioè in cui si venga ad attribuire alla stessa proposizione tanto il valore 1 che il valore 0. Vediamo prima un caso semplice e poi uno più complesso.

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

$\underline{\mathbf{1}}$ 0 $\underline{\mathbf{0}}$ 0 0

$$[(p \rightarrow q) \wedge r] \rightarrow [(\neg r \vee p) \rightarrow q]$$

0 1 0 1 $\underline{\mathbf{1}}$ 0 1 $\underline{\mathbf{0}}$ 1 0 0 0

Tautologie, contraddizioni e fbf soddisfacibili

Una fbf del PC è una tautologia se è valida per ogni assegnazione di valori di verità.

$p \vee \neg p$ $\neg(p \wedge \neg p)$ $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

Una fbf del PC è una contraddizione quando non è mai valida per ogni assegnazione di valori di verità

$p \wedge \neg p$ $\neg(p \vee \neg p)$ $\neg[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)]$

Una fbf è soddisfacibile quando è valida se esiste almeno un'assegnazione di valori di verità che la renda vera.

Validità e conseguenza

Se $i(\alpha) = 1$, si dice che α è vera nell'interpretazione i, o che i soddisfa α, o che i è un modello di α, e si scrive anche $i \models \alpha$

Se esiste almeno una i tale che $i \models \alpha$, si dice che α è soddisfacibile, o (semanticamente) consistente.

Se non esiste alcun modello di α, si dice che α è insoddisfacibile, o (semanticamente) inconsistente, o contraddittoria, o una contraddizione.

Se per ogni i si ha $i \models \alpha$, si dice che α è logicamente valida, o logicamente vera, o una tautologia, e si scrive semplicemente $\models \alpha$.

Si dice che β è conseguenza logica di α, e si scrive $\alpha \models \beta$ se per ogni i, se $i \models \alpha$ allora $i \models \beta$.

Coerenza, completezza, decidibilità

- Il calcolo PC è coerente, completo e decidibile
- Per la coerenza basta dire come, in PC, non sia possibile derivare sia ***α*** che **¬*α***. Per dimostrarlo basta dimostrare che (1) ogni assioma è valido; (2) che le regole di trasformazione conservano la validità; (3) che se una fbf ***α*** è valida allora **¬*α*** non è valida.
- La completezza ci dice che se $\models \boldsymbol{\alpha}$ allora $\vdash \boldsymbol{\alpha}$, se una formula di PC è valida allora è un teorema. Per la dimostrazione di completezza si rinvia ai testi in bibliografia.
- Il PC risulta anche essere decidibile, cioè si puo sempre costruire una procedura di decisione che ci consenta in un numero finito di passi di stabilire se una fbf sia valida oppure no.

La prova un teorema del calcolo proposizionale

- $\vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(1) $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ **PC6**

(2) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ **PC6** *seconda parte*

(3) $(\neg q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg(\neg q \wedge p)$ **DEF→**

(4) $q \vee \neg p \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ **PC1** *(legge di DeMorgan)*

(5) $(q \vee \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ *Da (2) per sostituzione*

(6) $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ *Da (5) per* **PC4** *(legge commutativa)*

Bibliografia e risorse online

- Edward J. Lemon, *Elementi di logica*, 2008, Laterza
- W.V.O. Quine, *Manule di logica*, 1980^{6}, Feltrinelli
- E. Casari, *Lineamenti di logica matematica*, 1982, Feltrinelli
- Voce *Logica proposizionale* su Wikipedia