Lezione 4

La logica filosofica 1: la logica modale. Cenni storici e introduzione del formalismo moderno.

Introduzione
Nota storico-critica

La logica modale si occupa dei «modi» in cui qualcosa può essere: se pensiamo alle proposizioni, ad esempio, esse potranno essere, oltre che vere o false - come c'insegna la logica formale classica -, anche, poniamo, *necessariamente* vere o false, o *possibilmente* vere/false, oppure, potremmo *sapere* o non *sapere* se siano vere o false, o, ancora, *obbligatorie* o *permesse*, o *temporalmente* vere o false. Ma potremmo avere anche, ad esempio, una predicazione necessaria/possibile di una proprietà ad un soggetto e così via.

La logica modale di cui ci occuperemo è quella che ha a che fare con la coppia necessario/possibile nel senso più ampio detto anche senso «logico». La modalità di tipo logico è anche detta *aletica* poiché ha a che fare con il concetto di verità (*alètheia*), sebbene non possa essere interpretata (per ciò che concerne le proposizioni) come vero-funzionale.

Un esempio potrebbe chiarire meglio il nostro discorso:

Supponiamo di dire: «È possibile che Paolo arrivi in tempo». Come ognuno può constatare questa proposizione sarebbe potuta essere vera anche se poi di fatto Paolo non fosse arrivato in tempo. Dunque, mentre ad una dato momento la proposizione *p*=«Paolo arriva in tempo» sarà falsa, l'affermazione secondo cui Paolo sarebbe potuto arrivare in tempo, potrebbe rimanere vera. D'altro canto, poniamo che Paolo arrivi in tempo, dunque che *p* sia vera: da ciò non consegue che «Necessariamente Paolo arriva in tempo» sia vera (anzi è, con tutta probabilità, falsa)

Da questo possiamo trarre la considerazione che i termini come necessario e possibile non si comportano in modo vero-funzionale; questa constatazione è confermata da un tentativo, destinato al fallimento,di costruire una tabella di verità per *p* e le sue modalità.

Introduciamo i moderni operatori modali:
◊ per *possibile*, e
□ per *necessario*.

Leggeremo ◊*p* come «È possibile che *p*» e □*p* come «È necessario che *p*».

p	◊*p*	□*p*
1	1	**?**
0	**?**	0

Nella prima riga leggiamo, tra l'altro, che se *p* è vera anche ◊*p* è vera; in epoca medievale, si dirà, riprendendo un'analoga affermazione aristotelica: *ab esse ad posse valet consequentia.* Un'altra verità che possiamo dedurre dalla tabella è che se □*p* è vera allora certamente p è vera; la scolastica parlerà, a questo proposito, del principio modale: *a necesse ad esse valet consequentia*.

Ma facciamo un passo indietro nel tempo: a parte alcune considerazioni platoniche sulla necessità (*anànche*), il primo filosofo che ha parlato e discusso i concetti modali in senso logico, prima ancora che metafisico, è stato il solito Aristotele*.* Nel *De Interpretatione,* negli *Analitica Priora* e *Posteriora,* nonché nella *Metafisica*, e in alcuni passi di opere minori, egli affronta la questione della possibilità e della necessità.

«Diciamo inoltre necessario che sia così com'è, quel che non può essere altrimenti». ***Metafisica*****, Δ, 5.**

In alcuni passi, tuttavia, egli sembra pensare alla necessità (ad es., una verità necessaria) come vera *sempre* (in ogni tempo); alla possibilità (*tò endechómenon*) come vera in alcune *occasioni*. Quest'ultimo senso di possibilità sembra piuttosto corrispondere a quello che in latino verrà definito *contingens*.
Non sempre Aristotele è chiaro se usando l'espressione *endechómenon* intenda il meramente possibile (*dynatón*) oppure, appunto, il «contingente».

Una verità si può dire contingente quando è possibile che si verifichi oppure no; la possibilità **pura** si può dire che è ciò che non è impossibile. Si può capire meglio questa differenza utilizzando gli operatori modali che abbiamo introdotto e riducendo le ambiguità del testo aristotelico.

$\Box p =_{def} \neg \Diamond \neg p$

$\Diamond p =_{def} \neg \Box \neg p$ *(possibile puro)*

Il contingente sarà allora definito come:

$\boldsymbol{C} =_{def} \neg \Box\ p$.

In alcuni casi tuttavia, lo Stagirita afferma in contrasto con quanto appena detto una cosa simile a

$\boldsymbol{C_1} =_{def} \Diamond p \wedge \Diamond \neg p =_{def} \Diamond p \wedge \neg \Box\ p$

In generale, intenderemo i concetti di possibile e contingente nel senso *puro*, anche per seguire una linea nello sviluppo della logica modale. Ovviamente, anche l'interpretazione alternativa ha una sua valenza nella comprensione della modalità, soprattutto in senso metafisico.

La logica megarico-stoica (identifichiamola con la logica proposizionale) ha riflettuto sul concetto di necessità/possibilità. In particolare, assumendo gli stoici una metafisica fondamentalmente *determinista* della realtà, essi discussero molto della struttura necessaria delle verità. Con Crisippo, come già ricordato nella lezione 1, vi sarà una elaborazione del concetto di *implicazione* («Se … allora …»). L'implicazione *filoniana* non considerava l'esistenza di una connessione necessaria tra antecedente e conseguente (generando tra gli altri i famosi paradossi); Crisippo introdusse quella che in seguito verrà definita implicazione formale, o *implicazione stretta*, secondo cui è impossibile che l'antecedente sia vero e il conseguente falso; nella simbologia moderna si tratta di interpretare l'implicazione stretta come

$\Box (p \to q)$.

Inoltre, pare che Crisippo, coerentemente con il determinismo stoico, e seguendo un'impostazione tipica del megarico Diodoro Crono, ritenesse che possibile sia semplicemente ciò che non si è ancora verificato (ma, se *possibile*, necessariamente lo sarà): come dire $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ (che come vedremo è un principio che non tutti i filosofi modali accetterebbero ad occhi chiusi).

La vera svolta nella concezione modale si avrà con la Scolastica ed in particolare con **Duns Scoto** (1266-1308): «se prima della creazione del mondo ci fosse stato un qualche intelletto che avesse composto 'essere' con 'mondo', la proposizione 'il mondo può essere' sarebbe stata vera, come pure la proposizione '*il mondo è possibile*' [...], e la causa di ciò non è se non la natura dei termini, poiché i termini sono fatti in modo che non **ripugnano**» ('possibilità logica' o possibilità come mera ***non impossibilità***).
Leibniz, ad esempio, assumerà come data questa posizione ed anzi introdurrà, proprio in continuità con tale concezione della possibilità, la teoria secondo la quale Dio, nel predisporsi alla creazione, avrebbe anzitutto considerato (dovremo pensare, in modo logico) le varie alternative possibili del mondo da creare: in pratica avrà comparato nella sua mente i vari «mondi possibili» e anche quelli *compossibili*, per poi procedere secondo il suo divino criterio, a scegliere il migliore tra essi.
Possibile è un *mondo* in cui non sia possibile contraddizione, e, se prendiamo due mondi possibili w e v, essi sono *compossibili* sse non sia possibile dalla loro *unione* ricavare, per qualsiasi proposizione α, $\alpha \land \neg\alpha$.
Grazie alla definizione formale di «mondo possibile», che verrà sviluppata nel XX sec., sarà possibile fornire una interpretazione rigorosa e matematicamente soddisfacente delle modalità aletiche.
Prima di passare ai sistemi di logica modale contemporanei, è fondamentale ricordare che, sempre in epoca scolastica, fu introdotta la distinzione tra modalità *de dicto* e modalità *de re.*

Modalità *de dicto* e *de re*

Pseudo-Tommaso, nell'opera *De modalibus* (sec. XIV), dirà, tra le altre cose:

> La modale *de dicto* è quella nella quale tutto il *dictum* funge da soggetto e il modo viene predicato, come in «Socratem currere est possibile». La modalità *de re* è quella nella quale il modo si interpone al *dictum*, come in «Socrate è possibile che corra». [...] Bisogna anche notare il fatto che il necessario ha somiglianza col segno universale affermativo [«Tutti», ∀], poiché ciò che è necessario è sempre; l'impossibile ha somiglianza col segno universale negativo [«Nessuno», ∀¬], poiché ciò che è impossibile non è mai. Il contingente, invero, e il possibile hanno somiglianza col segno particolare [«Qualche», ∃], poiché ciò che è contingente e possibile, talvolta è e talvolta non è […]

De dicto: «$\Box$(Socrate è saggio)»

De re: «Socrate è $\Box$saggio»

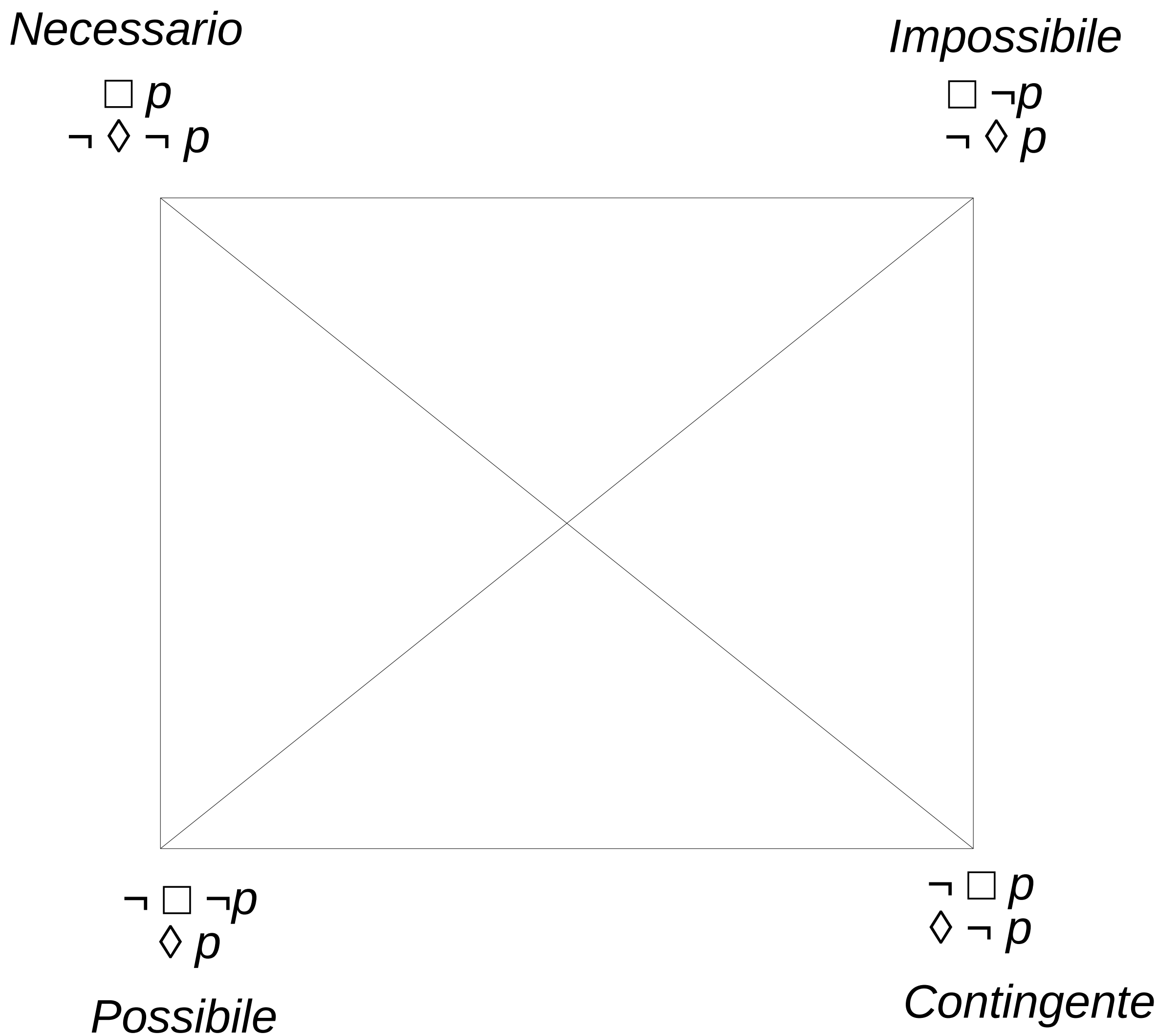
«È necessario che il lupo sia carnivoro»

(potrebbe ad esempio essere vero relativamente ad una situazione contingente)

«Il lupo è necessariamente carnivoro»

(non vi è contingenza: il lupo è, per natura, un carnivoro)

Il quadrato logico modale



I sistemi modali

Fu proprio lavorando sui paradossi dell'implicazione materiale e sull'implicazione stretta, che C. I. Lewis (1883-1964) pervenne alla formulazioni di alcuni sistemi assiomatici di logica modale (1918 e 1932).

Il problema dei sistemi S1-S5 è che fino alla fine degli anni Cinquanta, per quanto avessero una formulazione sintatticamente e matematicamente convincente, non possedevano una perspicua (e filosoficamente plausibile) interpretazione semantica.

A ciò contribuì in maniera essenziale Saul Kripke con la cosiddetta semantica a «mondi possibili».

Sistemi T, S4, S5

Soprattutto i due sistemi S4 e S5 hanno generato un consistente interesse, sia matematico che filosofico, sino ad oggi. S4 e S5 sono il punto di partenza di quella che viene chiamata logica modale *normale*.

Alcune condizioni del discorso modale devono essere comunque rispettate (anche in assenza di una semantica rigorosa), almeno a livello intuitivo.

A causa del significato degli operatori modali deve essere garantita la validità delle seguenti leggi (considerate intuitivamente valide):

1. $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$; $\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$.
2. $\Box(p \to q) \leftrightarrow \neg \Diamond (p \land \neg q)$
3. $\Box p \to p$; $p \to \Diamond p$
4. $[\Box p \land \Box(p \to q)] \to \Box q$

T, S4, S5 proposizionali

Il sistema di logica modale proposizionale più debole che soddisfi le condizioni intuitive appena enunciate, è detto sistema T (esposto da R. Feys nel 1937).

Ogni fbff di PC è una fbf di T. Gli **assiomi** peculiari di T sono:

T1. $\Box p \to p$

T2. $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

Regole di trasformazione: tutte le regole di PC più:

TR1. *Regola di necessitazione* (N): Se α è una *tesi,* allora $\Box\alpha$ è una *tesi*. **(Occhio a non confondere questa regola metalinguistica con la formula *invalida*** $\alpha \to \Box\alpha$. **Perché?**)

Il sistema S4 proposizionale ha la base assiomatica di T più:

S4.A: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

Questo assioma è tuttavia difficilmente esprimibile in senso intuitivo: cosa vuol dire che una verità è necessariamente necessaria? Il problema è controverso e rappresenta quella che Quine definirà «opacità» referenziale del contesto modale. Come sostengono Hughes e Cresswell nella loro *Introduzione alla logica modale*:

> «[…] è un punto di vista quantomeno rispettabile e plausibile quello per cui si dovrebbe rispondere affermativamente [al fatto che **S4.A** sia vera]: è plausibile, cioè, tener fermo che ogniqualvolta una proposizione è vera per necessità logica non si stratta mai di un fatto accidentale [contingente] ma sempre di qualcosa che logicamente non può mancare di essere così com'è. Non intendiamo, comunque, venire qui a capo del problema in modo definitivo: il fatto che molti metterebbero in discussione la validità di [**S4.A**] è quanto basta per giustificare la costruzione di un sistema, più forte di T, in cui questa formula sia una tesi, e per vedere come si configurerebbe tale sistema.» (p. 62)

Peraltro in S4 è un teorema anche che $\Box\Box p \rightarrow \Box p$, visto che questo è una tesi di T (Assioma T1) per sostituzione ($\Box p/p$); quindi potremo scrivere in S4:

$$\vdash \Box p \leftrightarrow \Box\Box p$$

Risulta evidente perciò che in S4 vale la *legge di riduzione* che consente di ridurre tutte le modalità consecutivamente iterate a semplici modalità (ad esempio, «□□» a «□», «◊◊» a «◊», ma anche «□□□» a «□» e così via). Questo dovrebbe anche togliere ogni dubbio sul «necessariamente necessario.

Aggiungendo alla base di T, l'assioma

S5.A: $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$

che dà luogo al sistema S5 proposizionale.
Alcuni teoremi di S5:

S5.T1: $\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$

S5.T2: $\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$

C'è da notare che **S4.A** non è un assioma di S5, ma può essere derivato come teorema in S5.

S5.T3[=S4.A]: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

Questo significa che S5 «contiene» S4.

Possiamo concludere dicendo che, intendendo il segno "$<<$" come «modalmente più debole», T$<<$ S4 $<<$ S5.

Considerazioni filosofiche finali sul calcolo modale proposizionale.

Dato che si può provare la coerenza di T, S4 ed S5 è interessante sapere che aggiungendo la formula intuitivamente *invalida*

$$p \to \Box p$$

non si rende inconsistente il sistema. In tale sistema il nuovo assioma introdurrebbe un elemento di evidente compromissione metafisica con una visione deterministica, che molti potrebbero ritenere inaccettabile. Di fatto associare a T (o a S4, o a S5) tale nuovo assioma produrrebbe immediatamente il teorema

$$\vdash \Box p \leftrightarrow p$$

ed in pochi evidenti passi al teorema

$$\vdash \Diamond p \leftrightarrow p,$$

il che provocherebbe il *collasso* di tale inusitato sistema modale nel puro e semplice calcolo delle proposizioni, con evidenti conseguenze metafisiche: ad esempio, tutto ciò che è attuale è necessario, e dunque anche il possibile è necessario **[perché?]**. Oppure, in modo altrettanto sconcertante, potrebbe portare alla completa *obsolescenza* della stessa logica modale proposizionale, in quanto gli operatori modali risulterebbero del tutto superflui.

Tuttavia, non è affatto impossibile evitare tali estreme conclusioni: si può dimostrare che senza l'inusitato assioma, nessuno dei sistemi modali proposizionali collassa in PC.

C'è, tuttavia, un'obiezione più seria alla logica modale proposizionale portata dal «solito» Quine: si potrebbe interpretare la nozione di verità logica necessaria come pura verità analitica (cioè valida semplicemente in virtù del significato dei termini che compongono la proposizione, come a dire, «"Tutti gli scapoli sono uomini non sposati" è una verità necessaria» vuol dire semplicemente che «"Tutti gli scapoli sono uomini non sposati" è vera *per definizione*»). In pratica, quelle che i *modalisti* chiamano **verità necessarie** sono semplicemente equivalenti alle **verità tautologiche**: in questo modo si disinnesca l'oscurità delle nozioni modali al prezzo di rinunciare completamente ad esse.

Conclusione provvisoria

La rinuncia quineana alle modalità nella logica proposizionale, però, non si può applicare *sic et simpliciter* alla logica modale *predicativa* (o **quantificata**): in essa, come vedremo, possono costruirsi proposizioni come, ad esempio,

$$\forall x \Diamond Fx \qquad \text{o} \qquad \exists x \Box Fx,$$

che essendo enunciati con modalità *de re*, non possono essere «ridotti» a mere tautologie, in quanto presentano modalità che agiscono solo sui predicati, ripresentando, dal punto di vista quineano, la consueta «opacità» referenziale: cosa vuol dire che un predicato appartiene necessariamente (o possibilmente) ad una certa quantità di individui? Non si dovrà, in tal caso, considerare la necessità di un predicato come una proprietà *essenziale*? E che cos'è una proprietà essenziale di uno o più individui? In cosa essa si può distinguere da una proprietà *accidentale* (contingente)? E, da ultimo, è possibile e/o conveniente dal punto di vista logico e metafisico tracciare (sempre che sia possibile) una linea di demarcazione tra proprietà essenziali e accidentali?

Interpretazione della logica modale proposizionale

Sia *W* un insieme di oggetti di qualche tipo (spesso si dicono *mondi* gli oggetti di W). Siano w_1, w_2, …, w_i, …, i membri di *W*. Sia data una relazione diadica *R* definita sopra i membri di *W*. Sia stabilita inoltre una assegnazione *V* di valori di verità ad una fbf α, che indicheremo con $V(\alpha)$. A differenza del PC, tuttavia, non potremo assegnare 1 o 0 *simpliciter* a $V(\alpha)$, ma dovremo affermare l'assegnazione di 1 o 0 a $V(\alpha)$ *relativamente ad un membro di W.*

Diremo perciò, $V(\alpha)$= 1 (o 0) relativamente a (o «in») w_i e scriveremo $V(\alpha, w_i)=1$ oppure $V(\alpha, w_i)=0$.

Per valutare la validità di una fbf qualunque, dobbiamo stabilire, innanzitutto, l'assegnazione di valutazioni di verità relativamente ai vari membri di *W*. Intanto, sappiamo che la valutazione di **¬** (*non*) e di **v** (*o..., disgiunzione*) sono le consuente assegnazioni del PC: $V(\neg\alpha)=1$ sse $V(\alpha)=0$; $V(\alpha \mathbf{v} \beta)=1$ sse non si dà mai il caso che $V(\alpha)= 0$ e $V(\beta)= 0$; in caso contrario $V(\alpha \mathbf{v} \beta)=0$. Queste valutazioni *devono estendersi a tutti i membri di W*.

La valutazione di □ (*necesse est*) dipenderà invece dall'assegnazione a membri di *W*: con ciò definiamo $V(\Box\alpha, w_i)=1$ sse $\forall w_j[(w_i R w_j) \rightarrow V(\alpha, w_j)=1]$. Quando la relazione tra mondi *R* è solo **riflessiva** (una relazione è *riflessiva* quando per tutti gli *x*, *xRx*), diciamo che tali condizioni rappresentano un modello del sistema T. Non abbiamo bisogno di altre condizioni per valutare la validità di una formula di T

Se la relazione *R* fosse anche **transitiva** (una relazione si dice *transitiva* sse per ogni *x, y* e *z*, se *xRy* e *yRz* allora *xRz*) avremo un modello per il sistema S4. Quando la relazione *R* fosse anche **simmetrica** (una relazione si dice *simmetrica* sse per ogni *x*, *y*, se *xRy* allora *yRx*), oppure se non avessimo affatto una relazione *R*, avremo un modello per il sistema S5.

Interpretazione a *mondi possibili*

Abbiamo definito la validità di una formula come la sua validità in ognuno dei mondi di ogni modello appropriato: l'espressione «mondo» per intendere un oggetto $w \in W$ riprende l'idea originale di Leibniz di *mondo possibile*, e molti logici la impiegano correntemente (soprattutto dopo Kripke). Originariamente fu introdotta, nel senso tecnico moderno, da Rudolf Carnap nella celebre opera *Meaning and Necessity* (1947), benché egli preferisse l'espressione «stato di cose» possibile o immaginabile o «descrizione di uno stato del mondo». Perlatro, l'analisi a «mondi possibili» della modalità consente a Carnap di distinguere significato e valore intensionale e estensionale di una espressione. L'intensione di un'espressione è una funzione che associa valori di verità a mondi possibili, mentre l'estensione è l'insieme delle cose denotate dall'espressione (quindi o oggetti e persone concrete o classi o valori di verità): il criterio di identità per *p* e *q* che ne desumiamo, quindi, consiste, per le proposizioni, nell'avere la stessa intensione ovvero la stessa funzione che denota gli stessi valori di verità negli stessi mondi possibili. In particolare, il sistema S5, con il suo modello, sembra esprimere in modo più diretto l'intuizione lebiniziana che una verità necessaria è quella valida in tutti i mondi possibili (per Carnap, in tutti gli stati di cose ipotizzabili). Per il sistemi T ed S4 e loro interpretazioni invece, la necessità deve essere relativizzata alla relazione *R* (sia essa solo riflessiva oppure anche transitiva): cioè esprimere una verità come *necessaria in un dato mondo* w_i, in tali sistemi, significa che essa deve essere valida in tutti i mondi w_i tali che valga *R* considerata come relazione di **accessibilità**. In altre parole, in T o S4, una verità è necessaria in un mondo w_i quando è valida anche in ogni mondo *accessibile* da w_i. **[Esempio, Cervantes e Don Quijote]**

Mondi possibili e modalità: un approccio intuitivo.

Di fatto la semantica a mondi possibili introdotta da Kripke alla fine degli anni Cinquanta del secolo scorso (ma sviluppata contemporaneamente in una semantica simile da J. Hintikka), cattura in modo estremamente rigoroso un'interpretazione dei mondi possibili come chiave interpretativa della modalità: peraltro, avevamo già notato una analogia tra operatori modali e quantificatori, che consentirà poi lo sviluppo della semantica kripkeana.
In modo intuitivo, potremmo dire che «è necessariamente vero» significa nient'altro che «vero in tutti i mondi possibili», laddove «è possibilmente vero» significa «vero in alcuni mondi possibili». Più formalmente potremo stabilire le seguenti definizioni:

Sia $w \in W$ un qualsiasi «mondo possibile» (potremmo anche parlare di «possibile stato di cose», o di un «insieme massimale di proposizioni non contraddittorie non necessariamente attuali»):

$$\Box \alpha =_{def} \forall w\, [V(\alpha, w) = 1]$$

$$\Diamond \alpha =_{def} \exists w\, [V(\alpha, w) = 1]$$

Completezza e coerenza dei sistemi modali

I sistemi T, S4 e S5 si possono dimostrare (con varie procedure) coerenti e completi. Ciò è un importante risultato poiché, al di là della mera intuizione comune o personale dei concetti modali, ciò ci consente di formalizzare tali intuizioni in termini rigorosi tramite sistemi assiomatici di cui possiamo essere, ragionevolmente, sicuri. Questo permetterà, ad esempio, di confrontare le nostre intuizioni modali, e di conseguenza *metafisiche*, con quelle di altri: di altri individui, di altre comunità, di altri popoli (in alcuni casi, si potrà anche pensare agli «altri» come meramente possibili). Ciò avvicina, in un certo senso, la discussione e il ragionamento filosofico a quello logico-matematico. C'è da fare, tuttavia, una precisazione: innanzitutto, la sistemazione assiomatica delle intuizioni modali non sarebbe potuta avvenire senza la «liberalizzazione» di logica e matematica che si sviluppò tra XIX e XX sec; in secondo luogo, al di là dell'interpretazione formale della semantica a *mondi possibili*, e del suo rigore logico, il significato metafisico dei concetti modali può venire esplicato in modi sostanzialmente differenziati (provvisoriamente, ad esempio, ci potremo chiedere: «cos'è un *mondo* possibile? Esso è comunque un *mondo*? In che senso? Esiste, platonicamente, al di fuori della nostra mente, o viceversa, ogni mondo possibile è una pura concettualizzazione e costruzione astratta della nostra mente? Si possono dare interpretazioni della modalità, che non facciano riferimenti a mondi possibili? E così via). Se la logica modale delle proposizioni ha sollevato questioni filosofiche complesse, con la logica modale dei predicati si rischia di cadere, secondo la celebre espressione di Quine, nella «giungla metafisica dell'essenzialismo aristotelico».